とやま科学オリンピック 2022

高校（数学）問題

2022 年 8 月 1 1 日（水）

時間： 9 時 20 分～11 時 50 分（150 分）

注 意 事 項

1．指示があるまで、問題冊子を開かないで、以下の注意事項をよく読むこと。
2．参加番号を解答用紙の決められた 欄 に記入してください。
3．問題は１ページから１５ページにわたって印刷してあります。
4．解答はすべて解答用紙に記入し、解答用紙だけを提出すること。
5．解答用紙は５枚あります。
6．参加番号を解答用紙の決められた欄に記入すること。
7．途中で気分が悪くなった場合や、トイレに行きたくなった場合は、すぐに申し出ること。

みなさんの 健闘 を期待しています。

富山県　　富山県教育委員会

1　富山県は，米づくりに適した気候風土に恵まれ，古くから米どころとして知られています。清れつな水と肥沃な大地，まっすぐな作り手から生まれた富山の新しいお米「富富富」は，全国でも高い評価を得ています。

お米に関する逸話として今も伝えられている話があります。昔，豊臣秀吉の家臣に，曽呂利新左衛門という者がいました。ある戦で功績を上げた新左衛門が，秀吉から何でも褒美をやるといわれました。そこで，新左衛門は「一日目に米を一粒，二日目には倍の二粒，三日目には倍の四粒と前の日の倍の分だけ，米粒を三十一日間欲しい。」といいました。秀吉は「たったそれだけでよいのか。」といい，家来に前日の倍ずつ米粒を運ばせました。しかし，途中で驚くべき量の米粒になることに気付き，さすがの秀吉も褒美を変更したそうです。

(1)　秀吉が新左衛門に三十一日間で渡さなければいけない米粒の総数を求めなさい。
ただし，累乗は計算しなくてよい。解答は，答えのみ記入すること。

＜ヒント＞

$S=1+2+2^2+2^3+\ \cdot\ \cdot\ \cdot+2^{30}$　　　　S を 2 倍すると

$2S=2+2^2+2^3+2^4+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +2^{30}+2^{31}$

また，富山県の地形は，標高 3000mの北アルプスから水深 1000mの富山湾まで約 4000mの高低差が特徴です。北アルプスからの栄養豊富な水が流れ込む富山湾は，ブリやホタルイカなど海の幸に恵まれ「天然のいけす」と呼ばれています。春の風物詩として親しまれているホタルイカを含むイカの令和元年の漁獲量は，滑川市 257t，魚津市 355t，富山市 496t となっています。

(2)　496 は「完全数」であるかどうか確かめなさい。ただし，その理由を示すこと。

【完全数】
1 番小さい完全数は 6 である。 6 の約数は 1，2，3，6 でその和は 12 となる。
このように約数の総和がその数の 2 倍となる自然数を完全数と定義する。

⑶　下の表を完成させ，６以外の完全数を１つ答えなさい。

自然数	素因数分解	総和	自然数	素因数分解	総和
n			16	2^4	31
2	2	3	17	17	18
3	3	4	18	$2\cdot3^2$	39
4	2^2	7	19	19	20
5			20	$2^2\cdot5$	42
6			21	$3\cdot7$	32
7			22	$2\cdot11$	36
8	2^3	15	23	23	24
9	3^2	13	24	$2^3\cdot3$	60
10	$2\cdot5$	18	25		
11	11	12	26		
12	$2^2\cdot3$	28	27		
13	13	14	28		
14	$2\cdot7$	24	29		
15	$3\cdot5$	24	30		

⑷　p^2q という形の完全数を全て求めなさい。理由も説明すること。
ただし，p と q は互いに異なる素数とする。

⑸　２以上の自然数 n に対して，2^n-1 が素数であるとき，$2^{n-1}(2^n-1)$ で表される数は完全数となる。これが成り立つことを説明しなさい。

2　21年ぶりに，新500円硬貨が発行された。富山県では，平成23年に地方自治法施行60周年記念として，おわら風の盆をデザインした500円硬貨が発行された。

（１）９枚のコインがあり，その中に１**枚だけ偽物**のコインがある。偽物のコインは本物のコインよりも**軽い**ことがわかっている。天秤をちょうど２**回**使って，この偽物のコインを発見する方法を示しなさい。

（２）13枚のコインがあり，その中に１**枚だけ偽物**のコインがある。偽物のコインは本物のコインよりも**重い**ことがわかっている。天秤を最大３**回**使って，この偽物のコインを発見する方法以下のように示しなさい。

13枚のコインを４枚，４枚，５枚に分けて，左から順番にA，B，Cグループとする。

１回目　AとBグループを天秤に載せる。

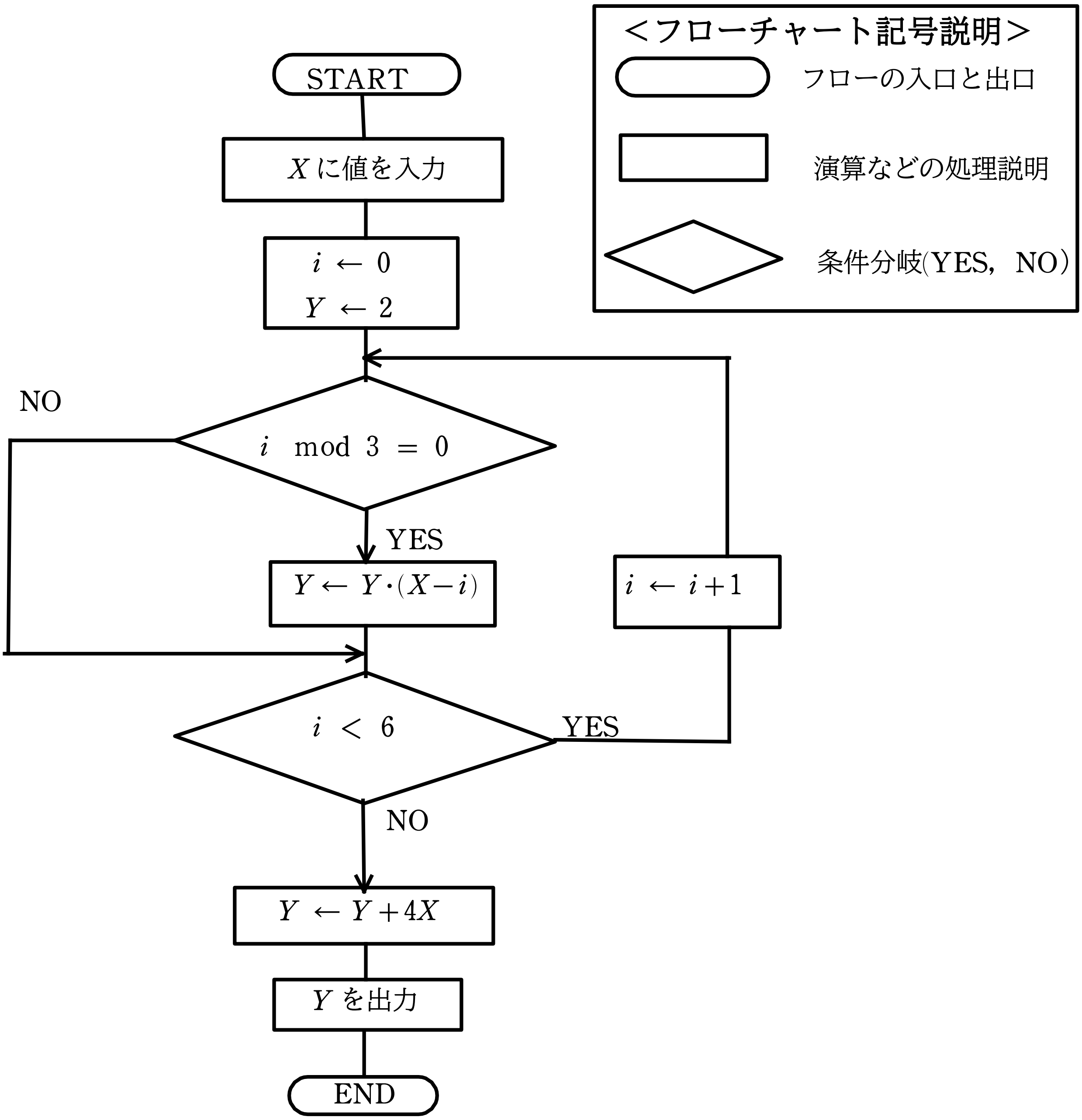
①天秤が釣り合った。

このとき，天秤の上には本物のコインしかない。よって，偽物は天秤に載せなかったCグループの中にある。

②天秤が釣り合わなかった。

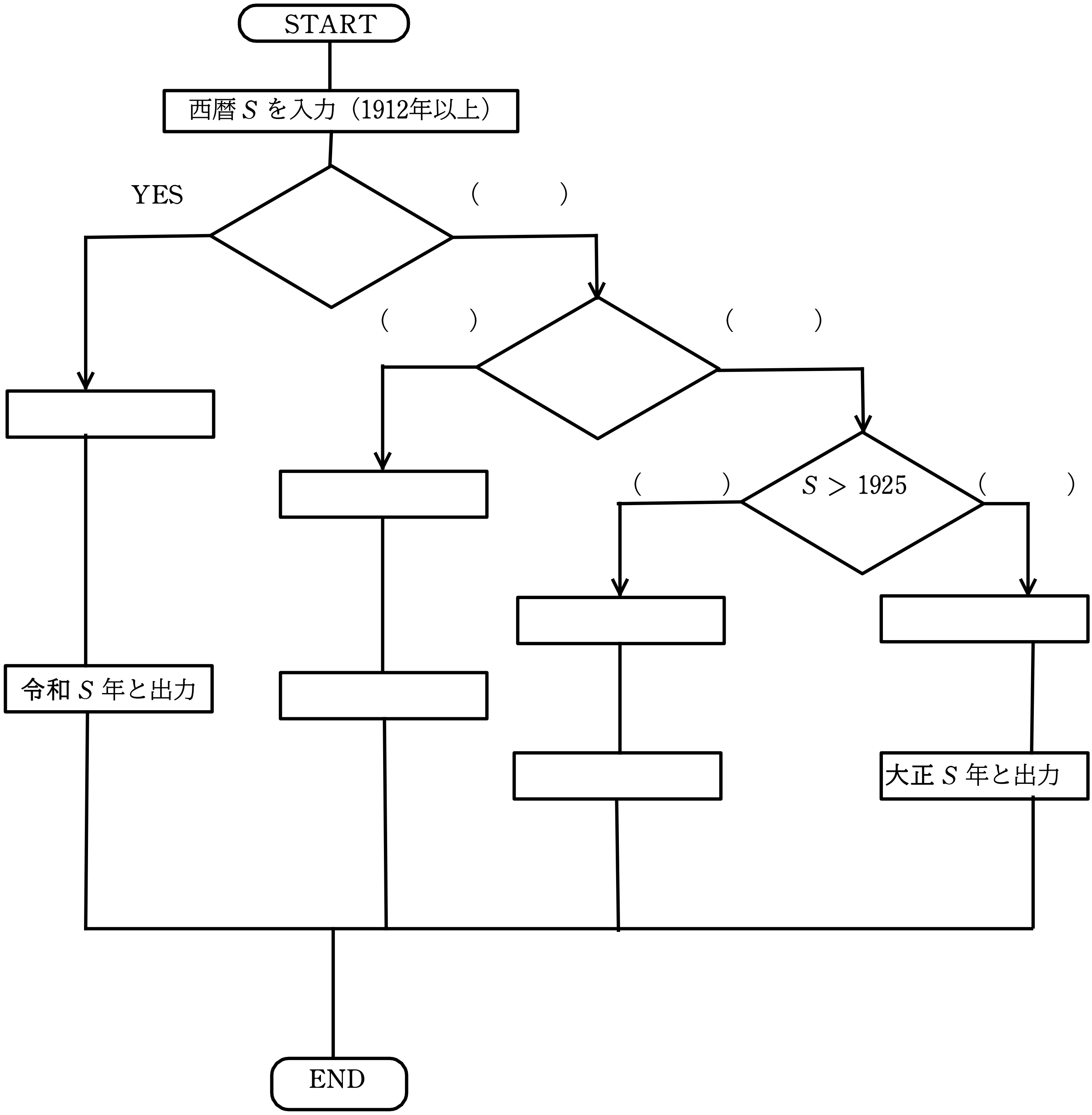
このとき，

（3） 下のフローチャートは，変数 X にデータを入力したとき， Y の値を出力するプログラムである。 ここで，ある X を入力し，出力された Y の値 が Y=0 となった。入力した X は 0 から 10 までの整数であるとき，考えられる X の値をすべて求めなさい。ただし， a ← b は，aに b を代入することを表し， M mod N は， M を N で割った余りを表す。



（４） Kくんは，西暦S年を和暦に直すプログラムをつくろうと考えた。以下は，そのプログラムのフローチャートである。このフローチャートを完成させなさい。

（1912年～1925年は大正，1926年～1988年は昭和，1989年～2018年は平成，2019年以後は令和とする）



3　魚津市には，たてもん祭りという伝統的な祭りがあります。豊漁と航海安全を祈願して供え物を神前に奉納することからはじまったと考えられています。たてもんは，車輪のないソリのような形をした台の中心に高さ約15メートル柱を立て，全体が二等辺三角形になるように，提灯やぼんぼりで飾り付けたものです。毎年８月の第１金，土曜日の夜に，諏訪神社から，７台のたてもんが繰り出されます。今年のたてもん祭りの開催予定日は，第１金曜日の８月５日です。魚津のタテモン行事は，2016年11月30日にユネスコ無形文化遺産に登録された富山県の宝の一つです。

さて，次のルールに従って数を並べた大きな三角形を考えます。

ルール
① 行ごとに数を並べ，n 行目には n 個の数を並べる
② 数の配列は左右対称で，各行の両端の数は１である
③ ２行目以降の両端以外の数は，左上と右上の数の和に等しい

図１

1
1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1

例えば，図１の５行目の左から２番目にある４は，上の行の左上の１と右上の３との和です。

(1)　この三角形を８行目まで完成させなさい。

図２はこの三角形の数が入るところを○に置き換えたものです。また図３は元の三角形で奇数だったところを●にしたものです。

(2)　図３のように○に置き換えた三角形を32行目まで奇数が入る部分を黒く塗りつぶしなさい。

図２

○
○　○
○　○　○
○　○　○　○

図３

●
●　●
●　○　●
●　●　●　●

(3)　図３の３行目の●は２個あります。62行目には●が何個あるか答えなさい。また，そのように考えた理由も答えなさい。

(4)　2022行目の左から805番目にあるのは●と○どちらか。その理由も答えなさい。

4　指数の性質の１つに，$a^x \times a^y = a^{x+y}$ があります。これは２つの数 a^x と a^y の積を指数部分の和 $x+y$ と計算できることを表しています。計算機がない時代では，大きな数の掛け算や割り算をすることは一苦労でした。そこで，学者たちは研究を重ね「計算尺」というアナログ式の計算用具を発明しました。計算尺は17世紀にイギリスで発明され，これにより莫大な計算処理が容易となるために航海関係，航空関係等さまざまな分野で使用されていました。しかし，電卓が発明され，その普及が進むとともに計算尺は衰退していき，1980年頃には生産がほぼ終了しました。現在は特定の目的に特化した計算尺が製造されています。

富山には毎日，国内外から多くの船や飛行機が往来しています。本日は，計算尺の仕組みに触れてみましょう。

なお，配布されている計算尺は (2) より後の部分で使用します。

10^3 は 10 を３回掛けた数 すなわち，$10^3 = 10 \times 10 \times 10$ ですが，10^0 や $10^{\frac{1}{2}}$，$10^{0.5}$ といった数を次のように考えることができます。

10^0 は指数法則『 $10^x \times 10^y = 10^{x+y}$ 』より，$10^x \times 10^0 = 10^{x+0} = 10^x$ となるから，$10^0 = 1$ と定めます。

$10^{\frac{1}{2}}$ は指数法則『 $(10^x)^y = 10^{xy}$ 』より，$\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 10^{\frac{1}{2}\times 2} = 10$ となる。

よって，$10^{\frac{1}{2}}$ は２乗して 10 になる数，すなわち $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \fallingdotseq 3.162$ となります。

このように指数部分が自然数でない数を考えることができます。

一般的に，$10^a = 2$，$10^b = 3$，$10^c = 7$ となる a，b，c の値は $a \fallingdotseq 0.3010$，$b \fallingdotseq 0.4771$，$c \fallingdotseq 0.8451$ であることが知られています。

また，この a，b，c の３つの値があれば，$10^{\square} = 4, 5, 6, 8, 9$ となる □の近似値を求めることができます。

例えば，$10^d = 4$ となる d の値は，指数法則『 $(10^x)^y = 10^{xy}$ 』を用いて，$10^a = 2$ とし，両辺を２乗すると，$10^{2a} = 4$，よって，$d = 2a \fallingdotseq 0.6020$ と計算できます。

$10^z = 5$ となる z の値は，指数法則『 $\dfrac{10^x}{10^y} = 10^{x-y}$ 』を用いることで求めることができます。

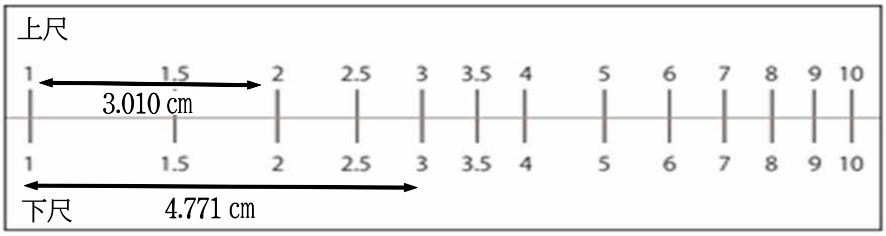
(1)　$10^{\square} = 5, 6, 8, 9$ となるように，それぞれの□の近似値を求め，解答欄の表を完成させなさい。

$10^{\square} = 1$	$\square = 0$
$10^{\square} = 2$	$\square \fallingdotseq 0.3010$
$10^{\square} = 3$	$\square \fallingdotseq 0.4771$
$10^{\square} = 4$	$\square \fallingdotseq 0.6020$
$10^{\square} = 5$	$\square \fallingdotseq$

$10^{\square} = 6$	$\square \fallingdotseq$
$10^{\square} = 7$	$\square \fallingdotseq 0.8451$
$10^{\square} = 8$	$\square \fallingdotseq$
$10^{\square} = 9$	$\square \fallingdotseq$
$10^{\square} = 10$	$\square = 1$

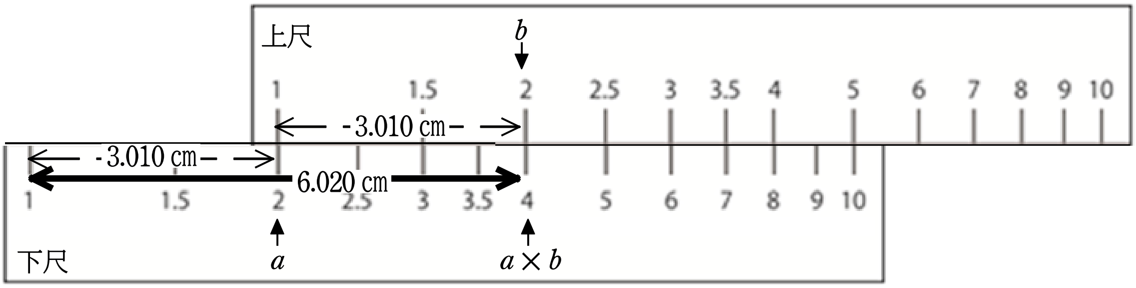
次に、実際に計算尺の仕組みに触れてみましょう。まず次の図は問題(1)で作った表の値を参考に作られています。

２の目盛りは $10^{0.3010} \fallingdotseq 2$ より 3.010cm，３のメモリは $10^{0.4771} \fallingdotseq 3$ より 4.771cm，このように他の目盛りもとった後，使いやすい長さになるように全体を適度に拡大させたものです。
目盛りの始まりが ０ではなく１であることは， $10^0 = 1$ だからです。



使いやすい長さになるように拡大

では，実際に計算尺を用いて，掛け算をやってみましょう。
掛け算 $a \times b$ をするときの計算尺の使い方は，下尺の a の上に上尺の １ がくるように計算尺をスライドさせます。このとき，上尺の b に対応する下尺の値が $a \times b$ の計算結果になります。
例えば，2×2 をするときは下尺の ２ の上に上尺の １ がくるようにスライドしてみましょう。上尺の２の真下をみると 2×2 の計算結果が４とわかります。

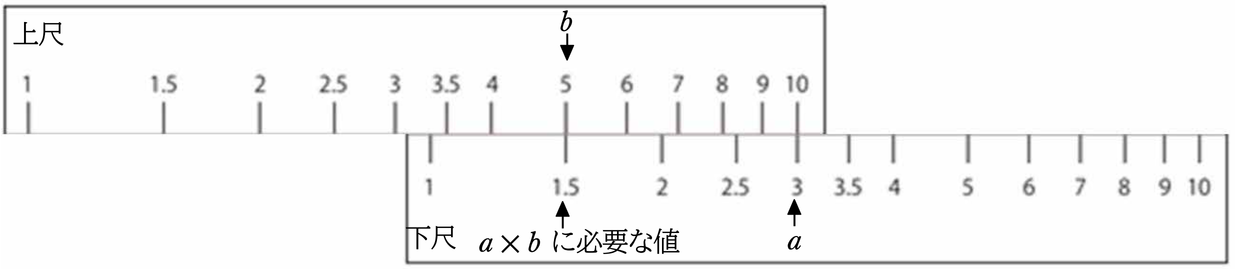


これは，スライドしたことにより長さの足し算が起こり，点線の長さの和＝実線の長さ
すなわち3.010cm ＋3.010cm ＝6.020cm　　($10^{0.3010+0.3010} = 10^{0.3010} \times 10^{0.3010} \fallingdotseq 2 \times 2 = 4 \fallingdotseq 10^{0.6020}$ より)
上尺の２の真下は，下尺の１から6.020cm離れた所，すなわち４と書かれた所になる，という仕組みです。

このように $a \times b$ は下尺の a の上に上尺の１がくるようにスライドすれば掛け算ができます。

次に，3×5 を考えましょう。上と同様にやってみても，上尺の 5 の真下には数字がないため，別の手順で求めます。

3×5 のように，答えが 10を超えるときは，下尺の a の上に上尺の10がくるようにスライドすればよいとされています。例えば，3×5 のように計算結果が 10 を超えるときは下の図のように，下尺の３の上に上尺の 10 がくるようにスライドすると上尺の５の真下が 1.5 になります。この計算尺から 3×5＝15 という答えを得ることができます。

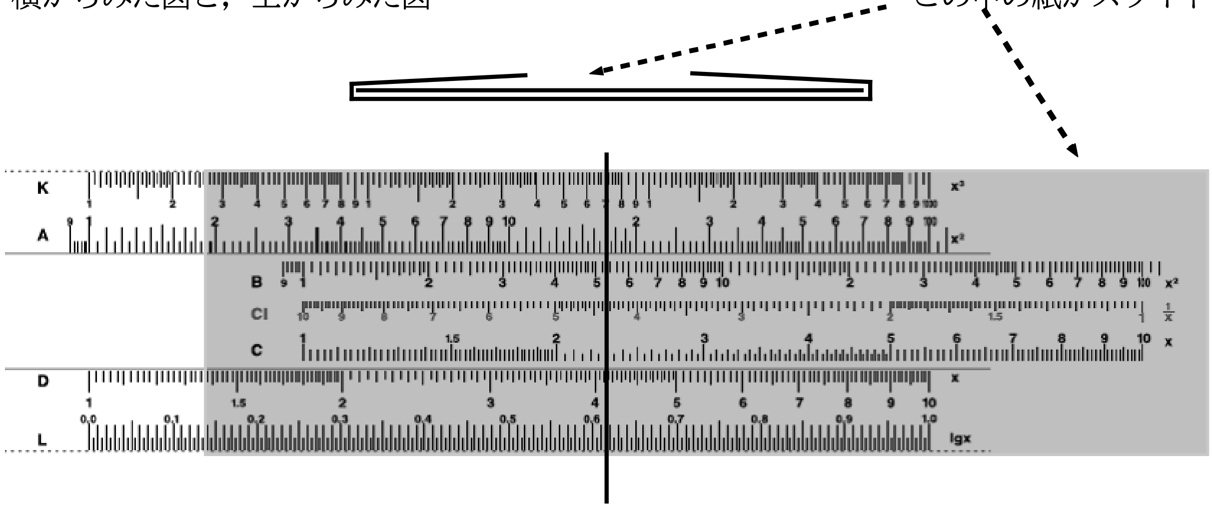


(2) この図において上尺の５の真下が 1.5 になる理由を説明しなさい。説明のために解答欄の図を用いてもよい。

また，(1)で求めた表の値や $10^{0.1761} \fallingdotseq 1.5$ を用いてもよい。また， $\log_a b$ のような数式を説明なしに用いてもよい。

ここからは目盛りの細かい計算尺を使用します。ここからは，配布されている計算尺を使います。下の図のように大きい方の紙を折り，小さい方の紙を中に入れてスライドして使用しましょう。

横からみた図と，上からみた図　　　　　　　　　　　　　　この中の紙がスライドできる



CとDの目盛りがこれまでの内容のことです。目盛りが細かいと18×23のような複雑な計算も，1.8×2.3をすることにより計算できます。

上の図では，1.8×2.3は4.1 より少し大きいくらい，ということが分かります。

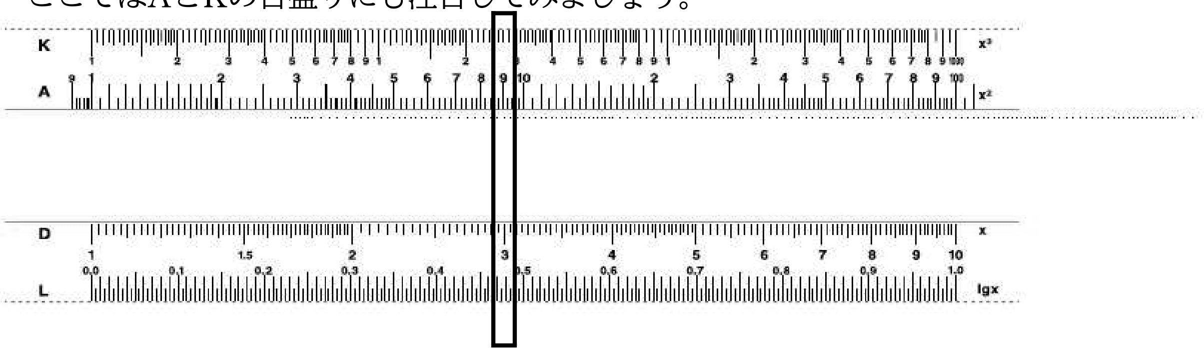
よって，18×23＝1.8×2.3×10×10≒410 という様にして計算の近似値が得られます。

他にも 181×2297のような，ほとんど 180×2300 のような計算も同じように計算尺をスライドさせ181×2297≒1.8×2.3×100×1000≒410000 という様にして計算の近似値が得られます。

このように，計算尺を扱う場合は，4.1 のような小数の答えから正しい答えを導くことは必須技能でした。

また，目盛りが細かい計算尺には，CとDの目盛り以外にも，いろいろな目盛りが付属しています。

ここではAとKの目盛りにも注目してみましょう。



Dのラインの真上にその値の２乗や３乗の値が書いてあります。

(Dの３の上では，Aは９，Kは 27 となっています。)

(3)　6×5^3 の計算方法を考え，配布されている計算尺を適切にスライドさせた状態でセロテープで固定し，解答用紙に張り付なさい。

　また，そのようにスライドさせた状態で計算できる理由も説明しなさい。

(まず，$5\times 5=25$ を得て… という様に段階を踏むのではなく，１回のスライドで $a\times b^3$ のような計算の答えを導く方法を考える。セロテープを用いて,尺がずれないように解答用紙に張り付けること。)

$\boxed{5}$ みくりが池は，火山湖（カルデラ湖）の１つであり，富山県を代表する美しい湖として有名です。一般にカルデラ湖は，美しい対称性を有していることが多く，みくりが池も例外ではありません。

みくりが池の面積は約 30,000 平方メートル，池の周囲は約 630 メートル，深さは約 15 メートルあります。

（1）ここで，みくりが池を図１に示すように半径 R の球の最下点から深さ h まで水で満たされている形状と仮定したとき，その貯水量はどれほどと見積もられるかを考えてみます。ここで r は池の形状を円と仮定したときの半径に相当します。

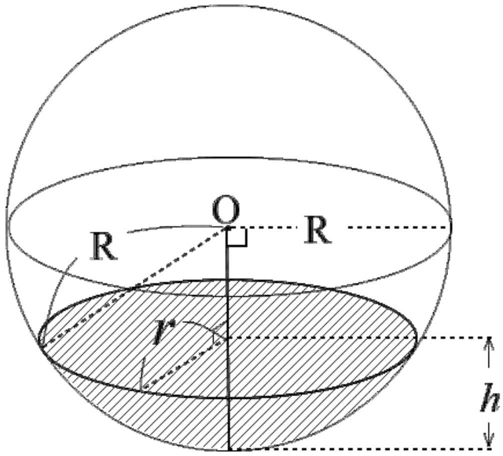


図１

いま池の周囲の長さを 200π メートル，水深 h を 15 メートルとするとき，球の半径 R は何メートルになるか求めなさい。

（２）つぎに，図２に示すように１辺の長さ a の立方体 ABCD-EFGH を AG が鉛直かつ頂点 A が下になるように配置します。また辺 BC の中点を C′，辺 CD の中点を D′，辺 DH の中点を H′，辺 EH の中点を E′，辺 EF の中点を F′，辺 BF の中点を B′とし，立方体を C′,D′,H′,E′,F′,B′を通る面で切断し，頂点 G を含む方を除去した形状の容器の池（図３）を仮定したとき，以下の問に答えなさい。

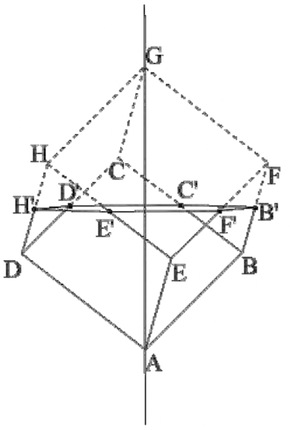


図２

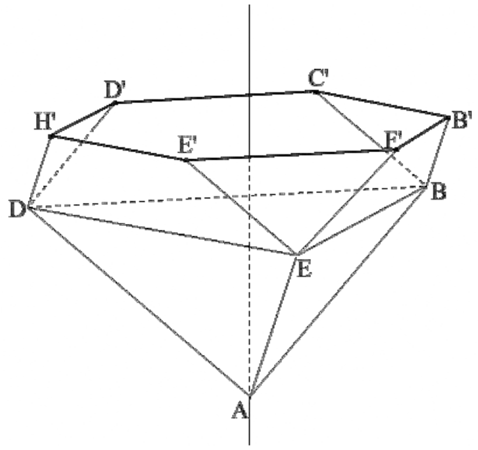


図３

① 池が満水状態のときの周囲を 630 メートルとするとき，立方体の１辺の長さ a は何メートルになるか求めなさい。また，このときの池の深さは何メートルになるか求めなさい。

② 図４，図５に示したように，この容器に水を流し込み，頂点 A から水面までの深さを h とするとき，水面が三角形 BDE より低いときの水面の面積を a 及び h で表しなさい。また，このときの容器の貯水量 V を a 及び h で表しなさい。

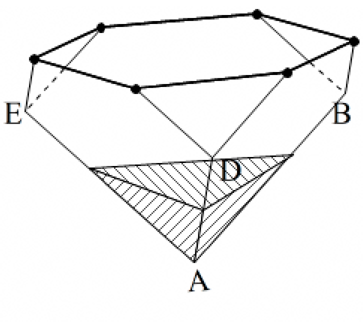


図４

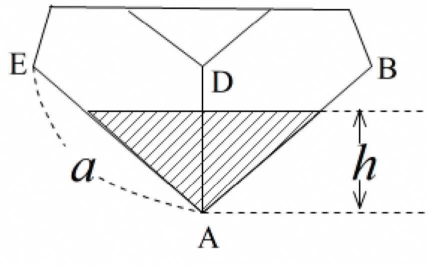


図５

③ つぎに図６に示すように，この容器に水を流し込み，水面が三角形 BDE より高い場合，三角形 BDE の内心を I，頂点 A から水面までの深さを h とするとき，水面（三角形 BDE を含む平面に平行）と AG との交点を P，IP の長さを z，水面と EF′の交点を Q とします。

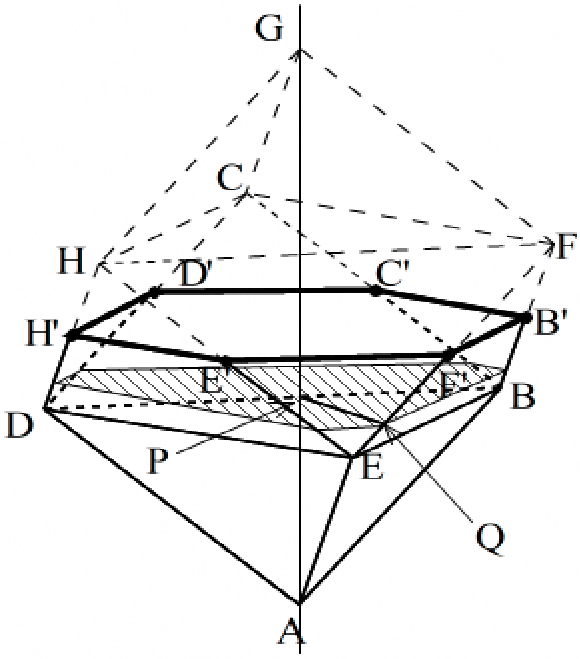


図６

一方，図６を真上から見た図が図７であり，三角形 AEF の部分を拡大したものが図８です。

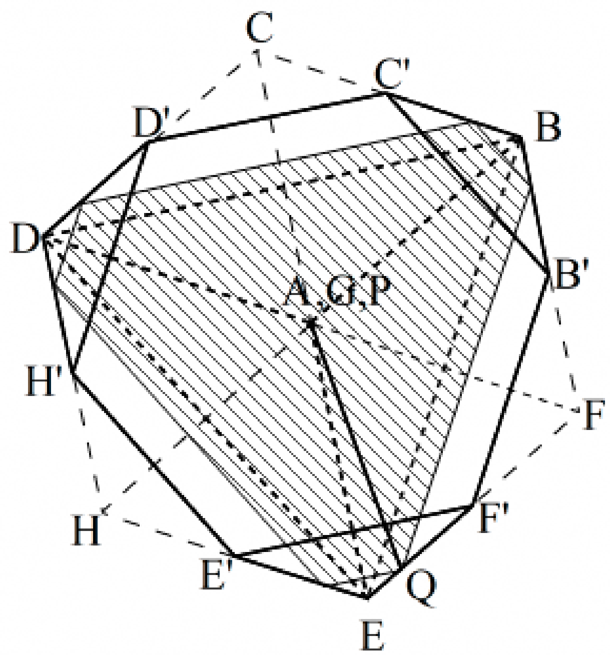


図７

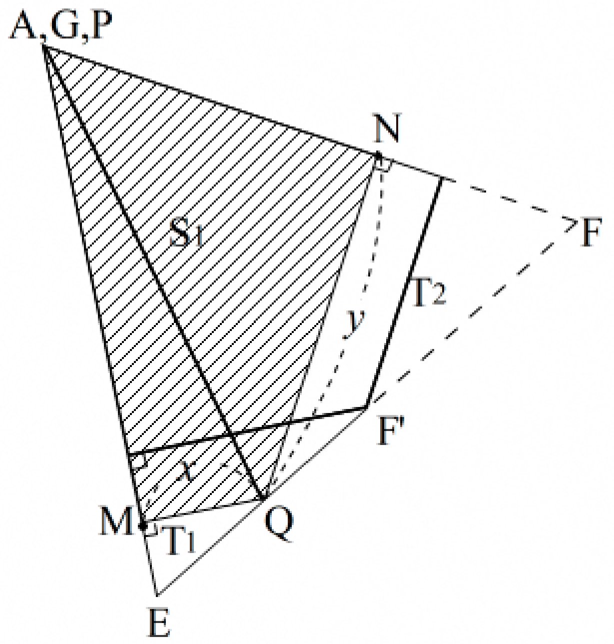


図８

図８において，Q から AE に下した垂線の足を M，AF に下した垂線の足を N，また四角形 AMQN の面積（斜線部の面積）を S_1，三角形 EMQ の面積を T_1，三角形 FNQ の面積を T_2 とします。このとき以下の手順に従い，水面の面積 S を h，a で表しなさい。

＜手順＞

１．図８において MQ の長さを x，NQ の長さを y とするとき，$x+y$ を a で表す。
２．図８の斜線部の面積 S_1 を x，a で表す。
３．IP の長さを z とするとき，x を z，a で表す。
４．図８の斜線部の面積 S_1 を z，a で表す。
５．１～４より，水面の面積 S（図７の斜線部）を h，a で表す。