とやま科学オリンピック 2023

高校（数学）問題

2023 年８月１0日（木）

時間：10 時 45分～12 時 5分（80 分）

注 意 事 項

1．指示があるまで，問題冊子を開かないで，以下の注意事項をよく読むこと。
2．参加番号を解答用紙の決められた 欄 に記入してください。
3．問題は６ページあります。
4．解答はすべて解答用紙に記入し，解答用紙はペアで１部提出すること。
5．解答用紙は３枚あります。
6．参加番号を解答用紙の決められた欄に記入すること。
7．途中で気分が悪くなった場合や、トイレに行きたくなった場合は、すぐに申し出ること。

みなさんの 健闘 を期待しています。

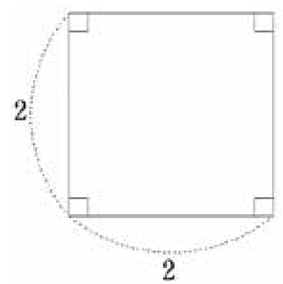
富山県　　富山県教育委員会

分野問題　数学

$\boxed{1}$　正方形の折り紙１枚だけを使って，次の問いについて考えてみましょう。ただし，折り紙を切ったり，複数枚使ったりしないものとします。

正方形の折り紙の１辺の長さを２とします。この折り紙１枚を折ることで次の長さを表してみましょう。

（１）$\sqrt{5}$
（２）$\sqrt{7}$



配付された厚紙を定規にして，求める長さを表す部分に濃い線を引いてください。
また，長さを表すために用いたすべての折れ線は必ず残しておくこと。

分野問題　数学

2　大小２つのサイコロ A,B に関して，初めに図１に示すように，座標平面の原点に１辺の長さが１のサイコロＡを，１の目が上（６の目が下）になり，かつ６の目の正方形の重心が座標軸(格子間隔１)の原点に一致し，各辺が座標軸に平行になるように置く。つづいてサイコロＢを振り，出た目Ｎに応じて以下のような操作を行う。(図２参照)

N=１...サイコロＡを座標軸の上から見て，滑らせずに 90°だけ x 軸の正の方向に倒す
N=２...サイコロＡを座標軸の上から見て，滑らせずに 90°だけ x 軸の負の方向に倒す
N=３...サイコロＡを座標軸の上から見て，滑らせずに 90°だけ y 軸の正の方向に倒す
N=４...サイコロＡを座標軸の上から見て，滑らせずに 90°だけ y 軸の負の方向に倒す
N=５,６...現在の状態を保持（何もしない）

このとき以下の問に答えなさい。なお，サイコロＢの目の出方は同様に確からしいものとする。

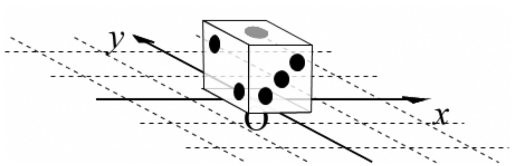


図１　初めのサイコロの位置

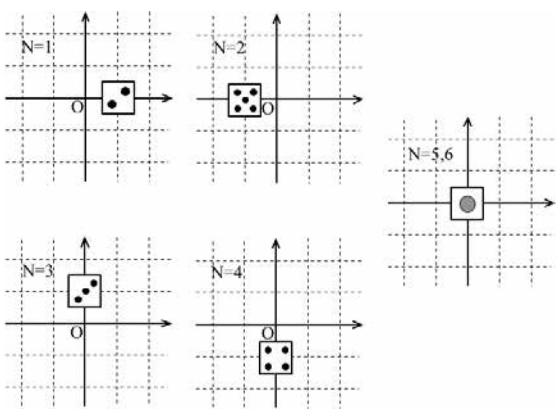


図２　１回目操作終了後のサイコロの位置と目

（1）この操作を３回繰り返したのち，サイコロが元の位置（原点）にあるためのサイコロＢの目の出方は次の３通りである。

(a)　３回とも５または６の目が出る
(b)　５または６の目が１回，１の目が１回，２の目が１回出る
(c)　５または６の目が１回，３の目が１回，４の目が１回出る

サイコロＢの目の出方が(a)である確率を P_a，(b)である確率を P_b，(c)である確率を P_c とする。

①　P_a ，P_b ，P_c をそれぞれ求め，既約分数で表しなさい。
②　①の結果より，この操作を３回繰り返したのち，サイコロが元の位置（原点）にある確率を求め，既約分数で表しなさい。

（2）この操作を４回繰り返したのち，サイコロが元の位置（原点）にある確率を求め，既約分数で表しなさい。

（3）この操作を２回繰り返したのち，サイコロＡの出た目（上に表示された目）が１である確率を求め，既約分数で表しなさい。

（4）この操作を n 回繰り返したのち，サイコロＡの出た目（上に表示された目）が１である確率を a_n，２である確率を b_n，３である確率を c_n，４である確率を d_n，５である確率を e_n，６である確率を f_n とするとき，n+1 回繰り返した後，サイコロＡの出た目が１である確率 a_{n+1} および６である確率 f_{n+1} は a_n，b_n，c_n，d_n，e_n，および f_n を用いて以下の式で表すことができる。

$$a_{n+1}=\boxed{\ A\ }a_n+\boxed{\ B\ }b_n+\boxed{\ C\ }c_n+\boxed{\ D\ }d_n+\boxed{\ E\ }e_n+\boxed{\ F\ }f_n$$
$$f_{n+1}=\boxed{\ G\ }a_n+\boxed{\ H\ }b_n+\boxed{\ I\ }c_n+\boxed{\ J\ }d_n+\boxed{\ K\ }e_n+\boxed{\ L\ }f_n$$

空欄Ａ～Ｌに入るべき数を求め，整数もしくは既約分数で答えなさい。

（5）（4）の結果と，すべての n において常に $a_n+b_n+c_n+d_n+e_n+f_n=1$ であることを用いて，この操作を４回繰り返したのち，サイコロＡの出た目が１である確率を求め，既約分数で表しなさい。

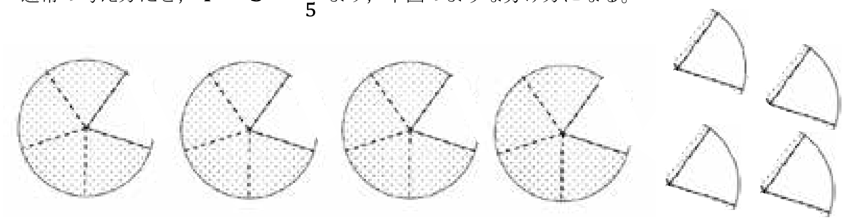
分野問題　数学

3

　単位分数とは，分子が１である分数のことをいう。古代エジプトでは，有理数を表すときにこの単位分数のみを用い，互いに異なる単位分数の和として様々な数を表した。そこで，このような表記の仕方はエジプト分数ともいわれ，ヨーロッパでは中世まで広く使われたようである。

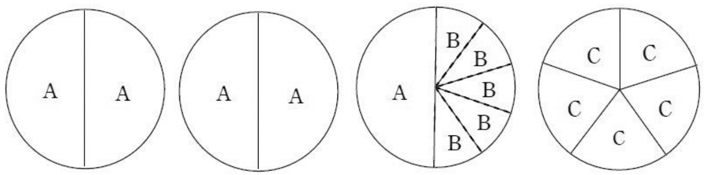
　このように，単位分数の和で表すことの利点は何であろうか。富山名物「ます寿し」を使って考えてみよう。ます寿しが４個あるとき，５人で均等に分ける方法を考える。

通常の考え方だと，$4 \div 5 = \frac{4}{5}$ より，下図のような分け方になる。



この場合，５人のうち４人は同じ形のます寿しを受け取れるが，１人だけは他の４人の切れ端の寄せ集めをもらうことになってしまう。

一方，この $\frac{4}{5}$ を単位分数の和で表すと $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$ となり，下図のようにＡ，Ｂ，Ｃの３種類の形がそれぞれ５つずつに分けられる。



この場合，各々が３種類の形をそれぞれ１つずつ受け取ることにすれば，５人とも同じ形のます寿しのセットをもらうことができる。このように，単位分数の和の形で表すことで，全員にとって平等な形の分け方にしやすいことが利点であると考えられる。

　有理数を単位分数の和として表す方法を考えよう。
そのための方法として，例えば以下の手順が知られている。

$\frac{b}{a}$ を単位分数の和で表すための手順（a, bは自然数）

手順Ⅰ：　$\frac{b}{a}$ 未満の最大の単位分数 $\frac{1}{x}$ を求め，（xは自然数）手順Ⅱへ。

手順Ⅱ：　$\frac{b}{a}-\frac{1}{x}$ を計算し，それが単位分数であれば終了。そうでなければこの分数を新たに $\frac{b}{a}$ として手順Ⅰに戻る。

上の方法を用いて，$\frac{9}{10}$ を単位分数の和で表したい。

$\frac{9}{10}$ より小さい最大の単位分数 $\frac{1}{x}$ は（　あ　）である。$\frac{9}{10}$ から（　あ　）を引くと（　い　）で，（　い　）より小さい最大の単位分数は（　う　）である。次に（　い　）から（　う　）を引くと（　え　）であり，これは単位分数になるからここで手順を終了する。

$\frac{9}{10}$ は（　あ　）と（　う　）と（　え　）という３つの単位分数の和として表せることが分かった。
よって，９個のます寿しを１０人に，各々に同じ形のものを配るためには，（　あ　）切れと（　う　）切れと（　え　）切れの切れ端をそれぞれ１０個ずつ用意し，１種類ずつ配ればよいことが分かる。

（1）　上の文章の（　あ　）～（　え　）にあてはまる分数を答えよ。

なお，どんな有理数でも，互いに異なる有限個の単位分数の和として表されることが分かっているが，その表し方は一通りに定まるとは限らず，複数の表し方をもつものもある。
例えば $\frac{5}{12}$ は上の方法に従って求めると $\frac{5}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$ と表せるが，他に

$\frac{5}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ と表すこともできる。

次に，もっと大きな数で表される有理数を単位分数の和で表すことを考えたい。
今年の西暦にちなんで，２０２３を分母にもつ分数について考えてみよう。
単位分数の和で表すことを考えるためにはまず，分母の数を素因数分解しておくと考えやすい。

（２）①２０２３を素因数分解せよ。
②２０２３の約数 a と b を用いて２９６を a^2+b の形で表せ。

（３）$\dfrac{296}{2023}$ を異なる２つの単位分数の和として表せ。

（４）$\dfrac{415}{2023}$ を異なる３つの単位分数の和として表せ。

最後に，単位分数の差についても考えてみよう。
すべての自然数 a, b について，

$$\frac{b-a}{a\times b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

という式が成り立つ。
すなわち，左辺のような形の有理数は，互いに異なる単位分数の差として表すことができる。

（５）上の式が成り立つことを利用して，以下の式を計算せよ。

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}+\cdots+\frac{1}{2021\times2023}$$