

# とやま科学オリンピック **2023**

## 高校（数学）問題

2023年8月10日（木）

時間：10時45分～12時5分（80分）

### 注意事項

1. 指示があるまで、問題冊子を開かないで、以下の注意事項をよく読むこと。
2. 参加番号を解答用紙の決められた欄に記入してください。
3. 問題は6ページあります。
4. 解答はすべて解答用紙に記入し、解答用紙はペアで1部提出すること。
5. 解答用紙は3枚あります。
6. 参加番号を解答用紙の決められた欄に記入すること。
7. 途中で気分が悪くなった場合や、トイレに行きたくなった場合は、すぐに申し出ること。

みなさんの健闘を期待しています。

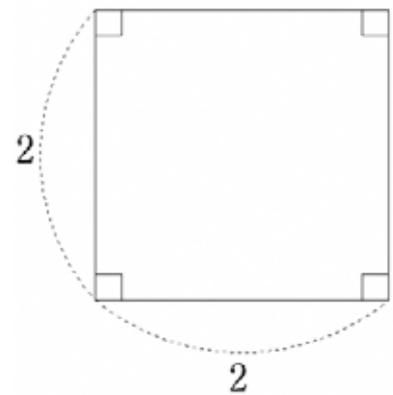
富山県 富山県教育委員会

## 分野問題 数学

- 1 正方形の折り紙1枚だけを使って、次の問いについて考えてみましょう。ただし、折り紙を切ったり、複数枚使ったりしないものとします。

正方形の折り紙の1辺の長さを2とします。この折り紙1枚を折ることで次の長さを表してみましょう。

- (1)  $\sqrt{5}$   
(2)  $\sqrt{7}$



配付された厚紙を定規にして、求める長さを表す部分に濃い線を引いてください。また、長さを表すために用いたすべての折れ線は必ず残しておくこと。

分野問題 数学

2 大小2つのサイコロ A,B に関して、初めに図1に示すように、座標平面の原点に1辺の長さが1のサイコロ A を、1の目が上（6の目が下）になり、かつ6の目の正方形の重心が座標軸(格子間隔1)の原点に一致し、各辺が座標軸に平行になるように置く。つづいてサイコロ B を振り、出た目 N に応じて以下のような操作を行う。(図2参照)

N=1 ...サイコロ A を座標軸の上から見て、滑らせずに  $90^\circ$  だけ  $x$  軸の正の方向に倒す

N=2 ...サイコロ A を座標軸の上から見て、滑らせずに  $90^\circ$  だけ  $x$  軸の負の方向に倒す

N=3 ...サイコロ A を座標軸の上から見て、滑らせずに  $90^\circ$  だけ  $y$  軸の正の方向に倒す

N=4 ...サイコロ A を座標軸の上から見て、滑らせずに  $90^\circ$  だけ  $y$  軸の負の方向に倒す

N=5,6 ...現在の状態を保持 (何もしない)

このとき以下の間に答えなさい。なお、サイコロ B の目の出方は同様に確からしいものとする。

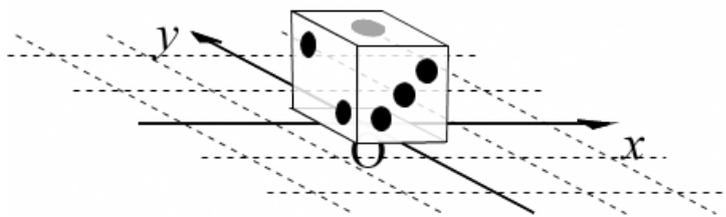


図1 初めのサイコロの位置

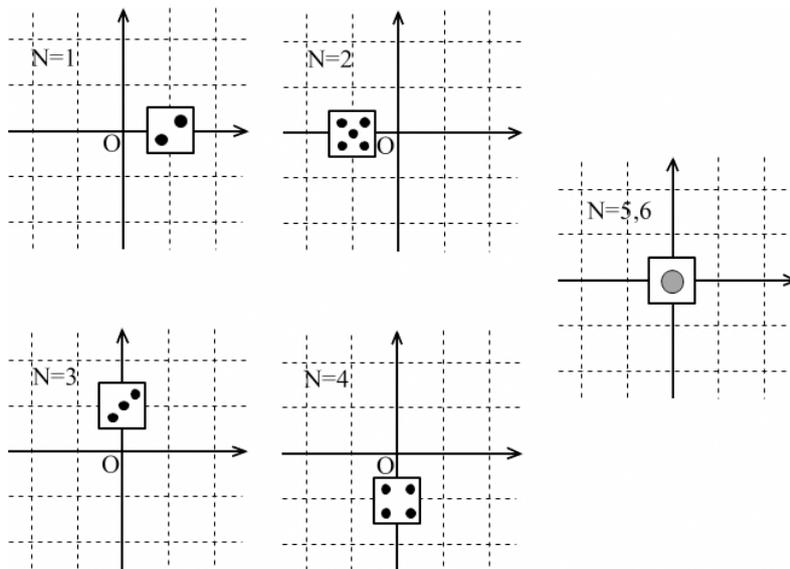


図2 1回目操作終了後のサイコロの位置と目

(1) この操作を3回繰り返したのち、サイコロが元の位置(原点)にあるためのサイコロ B の目の出方は次の3通りである。

(a) 3回とも5または6の目が出る

(b) 5または6の目が1回, 1の目が1回, 2の目が1回出る

(c) 5または6の目が1回, 3の目が1回, 4の目が1回出る

サイコロ B の目の出方が(a)である確率を  $P_a$ , (b)である確率を  $P_b$ , (c)である確率を  $P_c$  とする。

①  $P_a$ ,  $P_b$ ,  $P_c$  をそれぞれ求め, 既約分数で表しなさい。

② ①の結果より, この操作を3回繰り返したのち, サイコロが元の位置(原点)にある確率を求め, 既約分数で表しなさい。

(2) この操作を4回繰り返したのち, サイコロが元の位置(原点)にある確率を求め, 既約分数で表しなさい。

(3) この操作を2回繰り返したのち, サイコロ A の出た目(上に表示された目)が1である確率を求め, 既約分数で表しなさい。

(4) この操作を  $n$  回繰り返したのち, サイコロ A の出た目(上に表示された目)が1である確率を  $a_n$ , 2である確率を  $b_n$ , 3である確率を  $c_n$ , 4である確率を  $d_n$ , 5である確率を  $e_n$ , 6である確率を  $f_n$  とするとき,  $n+1$  回繰り返した後, サイコロ A の出た目が1である確率  $a_{n+1}$  および6である確率  $f_{n+1}$  は  $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n$ , および  $f_n$  を用いて以下の式で表すことができる。

$$a_{n+1} = \boxed{A} a_n + \boxed{B} b_n + \boxed{C} c_n + \boxed{D} d_n + \boxed{E} e_n + \boxed{F} f_n$$

$$f_{n+1} = \boxed{G} a_n + \boxed{H} b_n + \boxed{I} c_n + \boxed{J} d_n + \boxed{K} e_n + \boxed{L} f_n$$

空欄 A~L に入るべき数を求め, 整数もしくは既約分数で答えなさい。

(5) (4) の結果と, すべての  $n$  において常に  $a_n + b_n + c_n + d_n + e_n + f_n = 1$  であることを用いて, この操作を4回繰り返したのち, サイコロ A の出た目が1である確率を求め, 既約分数で表しなさい。

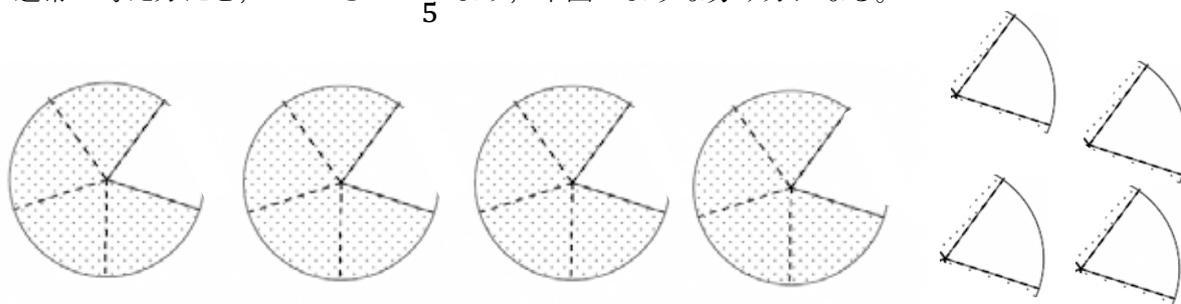
## 分野問題 数学

3

単位分数とは、分子が1である分数のことをいう。古代エジプトでは、有理数を表すときにこの単位分数のみを用い、互いに異なる単位分数の和として様々な数を表した。そこで、このような表記の仕方はエジプト分数ともいわれ、ヨーロッパでは中世まで広く使われたようである。

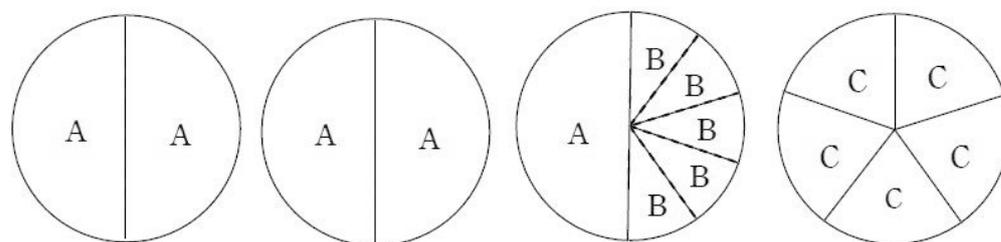
このように、単位分数の和で表すことの利点は何であろうか。富山名物「ます寿し」を使って考えてみよう。ます寿しが4個あるとき、5人で均等に分ける方法を考える。

通常の見え方だと、 $4 \div 5 = \frac{4}{5}$  より、下図のような分け方になる。



この場合、5人のうち4人は同じ形のます寿しを受け取れるが、1人だけは他の4人の切れ端の寄せ集めをもらうことになってしまう。

一方、この  $\frac{4}{5}$  を単位分数の和で表すと  $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$  となり、下図のように A, B, C の3種類の形がそれぞれ5つずつに分けられる。



この場合、各々が3種類の形をそれぞれ1つずつ受け取ることにすれば、5人とも同じ形のます寿しのセットをもらうことができる。このように、単位分数の和の形で表すことで、全員にとって平等な形の分け方にしやすいことが利点であると考えられる。

有理数を単位分数の和として表す方法を考えよう。

そのための方法として、例えば以下の手順が知られている。

$\frac{b}{a}$  を単位分数の和で表すための手順 ( $a, b$  は自然数)

手順Ⅰ： $\frac{b}{a}$  未満の最大の単位分数  $\frac{1}{x}$  を求め、( $x$  は自然数) 手順Ⅱへ。

手順Ⅱ： $\frac{b}{a} - \frac{1}{x}$  を計算し、それが単位分数であれば終了。そうでなければこの分数を新

たに  $\frac{b}{a}$  として手順Ⅰに戻る。

上の方法を用いて、 $\frac{9}{10}$  を単位分数の和で表したい。

$\frac{9}{10}$  より小さい最大の単位分数  $\frac{1}{x}$  は ( あ ) である。 $\frac{9}{10}$  から ( あ ) を引くと ( い ) で、( い ) より小さい最大の単位分数は ( う ) である。次に ( い ) から ( う ) を引くと ( え ) であり、これは単位分数になるからここで手順を終了する。

$\frac{9}{10}$  は ( あ ) と ( う ) と ( え ) という3つの単位分数の和として表せることが分かった。

よって、9個のます寿しを10人に、各々に同じ形のものを配るためには、( あ ) 切れと ( う ) 切れと ( え ) 切れの切れ端をそれぞれ10個ずつ用意し、1種類ずつ配ればよいことが分かる。

(1) 上の文章の ( あ ) ~ ( え ) にあてはまる分数を答えよ。

なお、どんな有理数でも、互いに異なる有限個の単位分数の和として表されることが分かっているが、その表し方は一通りに定まるとは限らず、複数の表し方をもつものもある。

例えば  $\frac{5}{12}$  は上の方法に従って求めると  $\frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$  と表せるが、他に

$\frac{5}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$  と表すこともできる。

次に、もっと大きな数で表される有理数を単位分数の和で表すことを考えたい。  
今年の西暦にちなんで、2023を分母にもつ分数について考えてみよう。  
単位分数の和で表すことを考えるためにはまず、分母の数を素因数分解しておくと考えやすい。

- (2) ① 2023を素因数分解せよ。  
② 2023の約数  $a$  と  $b$  を用いて  $296$  を  $a^2 + b$  の形で表せ。

(3)  $\frac{296}{2023}$  を異なる2つの単位分数の和として表せ。

(4)  $\frac{415}{2023}$  を異なる3つの単位分数の和として表せ。

最後に、単位分数の差についても考えてみよう。  
すべての自然数  $a, b$  について、

$$\frac{b-a}{a \times b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

という式が成り立つ。  
すなわち、左辺のような形の有理数は、互いに異なる単位分数の差として表すことができる。

- (5) 上の式が成り立つことを利用して、以下の式を計算せよ。

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \cdots + \frac{1}{2021 \times 2023}$$

