とやま科学オリンピック 2024

分 野 問 題

数 学

（高校部門）

2024 年 8 月 9 日（金）

時間：10 時 50 分～12 時 10 分（80 分）

注 意 事 項

１．指示があるまで問題冊子を開かないで以下の注意事項をよく読むこと。
２．参加番号を解答用紙の決められた 欄 に記入してください。
３．チームで協力して行うので、声を出して相談してもよいです。
４．問題は$\boxed{1}$から$\boxed{3}$まで３ページにわたって印刷してあります。
５．解答はすべて解答用紙に記入し、解答用紙だけを提出すること。
６．解答用紙は５枚あります。
７．参加番号を解答用紙の決められた欄に記入すること。
８．途中で気分が悪くなった場合や、トイレに行きたくなった場合は、すぐに申し出ること。

みなさんの健闘を期待しています。

富山県　　富山県教育委員会

分野問題　数学

$\boxed{1}$

分数の分母にさらに分数が含まれている以下のような形のものを**連分数**と言う。

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cdots}}}$$

このとき，a_0 は整数，a_n（$n=1,2,3,\cdots$）は自然数とする。

連分数において，各分数の分子部分（上記ではb_1，b_2，$b_3,\cdots$ ）が 1 である連分数すなわち

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}}$$

を**正則連分数**と言い，$[a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots]$で表すこととする。次の問いに答えよ。

（1） $\frac{8}{3}$ を正則連分数で表せ。

（2） $\frac{356}{113}$ を正則連分数で表せ。

（3） $x=1+\frac{1}{1+x}$ を満たす正の数 x を求めよ。

（4） $\sqrt{2}$ を正則連分数で表せ。　<u>**※$[a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots]$の形で答えよ。**</u>

$\boxed{2}$

立山連峰は富山県，岐阜県をまたがる日本有数の山脈であり，晴れた日には美しい立山連峰の姿を眺めることができる。中でも立山本峰は日本百名山にも数えられており，その最高到達点である大汝山の標高が 3015mであることが知られている。

さて，この 3015 という数は $3015=3^2\times5\times67$ と素因数分解されるため，3 や 5 や 67 の倍数である。一般に，4 桁の自然数について，その数が 3 や 5 や 67 の倍数であるかどうか判定するためには以下の方法が知られている。

＜3 の倍数の判定法＞ 各位の数の和が 3 の倍数であれば，もとの自然数は 3 の倍数である。

＜5 の倍数の判定法＞ 一の位の数が 0 か 5 であれば，もとの自然数は 5 の倍数である。

＜67 の倍数の判定法＞ もとの 4 桁の自然数の，千の位，百の位，十の位，一の位の数をそれぞれ a, b, c, d とする。このとき，「十の位が a，一の位が b である 2 桁の自然数」から，「十の位が c，一の位が d である 2 桁（または 1 桁）の自然数を 2 倍した数」を引いた整数が 67 の倍数であれば，もとの自然数は 67 の倍数である。

（1） 4 桁の自然数において，＜3 の倍数の判定法＞が正しいことを証明せよ。
（2） 4 桁の自然数において，＜67 の倍数の判定法＞が正しいことを証明せよ。
（3） 3 と 5 と 67 以外の素因数をもたない 4 桁の自然数は全部でいくつあるか。

$\boxed{3}$

花子さんは，お父さんの昔の数学のノートを見つけた。次のような文章
「２本の平行線 ℓ, ℓ' と垂直に交わる直線 m がある。直線 ℓ と m の交点を A ，直線 ℓ' と m の交点を B とし，線分 AB の中点を O とする。直線 ℓ 上に点 A’を，直線 ℓ' 上に点 B’をとり，∠ A’OB’を直角とする直角三角形 OA’B’を考える。ここで 線分 AO の長さを a とする。」
が，どうにか読み取れた。ある問題の一部分のようである。

花子さんは，お父さんがどんな問題を解いていたのか気になった。

（1）読み取れた文章の条件のみを使用して，線分の長さに関する問題を２題作り，それぞれ証明および解答を添えて答えよ。

（2）線分 AA’の長さを x とするとき，直角三角形 OA’B’の面積を a と x の式で表せ。また，面積の最小値と，そのときの x の値を a を用いて表せ。
ただし必要ならば２数 P, Q に関して
公式 : $P^2+Q^2 \geqq 2PQ$, ただし $P^2+Q^2=2PQ$ となるのは $P=Q$ のときのみを使用してよい。