

# とやま科学オリンピック 2019

## 数 学

(高校部門)

2019年8月8日(木)

時間：9時45分～12時15分(150分)

### 注意事項

1. 指示があるまで、問題冊子を開かないで、以下の注意事項をよく読むこと。
2. 問題は1から5までの、7ページにわたって印刷してあります。  
また、別紙が1枚あります。
3. 解答はすべて解答用紙に記入し、解答用紙だけを提出すること。
4. 解答用紙は5枚あります。
5. 参加番号を解答用紙の決められた欄に記入すること。
6. 途中で気分が悪くなった場合や、トイレに行きたくなった場合は、すぐに申し出ること。

みなさんの健闘を期待しています。

このページに問題はありません

1

富山県は1883年(明治16年)5月に誕生しました(富山県HPより)。富山県の生年月日を1883年(明治16年)5月1日とすると、富山県は火曜日生まれになります。

では、あなたは何曜日に生まれましたか。計算で求めなさい。また、解答用紙には、あなたの生年月日、答え、考え方を解答しなさい。

ただし、2000年、2004年、2008年、2012年、2016年は<sup>うるうどし</sup>閏年です。また、本日2019年8月8日は木曜日です。

2 富山県の人口の推移を調べている立山くんは、【資料1】を自分のパソコンにダウンロードし、眺めています。すると、あることに気がきました。

【資料1】 市町村別、月別出生者数 (単位：人)

	H28			H29								
	10月	11月	12月	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月
富山市	274	269	263	291	230	291	259	275	241	233	291	250
高岡市	100	92	81	93	66	107	78	127	93	94	129	116
魚津市	17	24	25	18	19	44	22	15	23	18	27	21
氷見市	20	20	13	17	22	29	16	18	18	22	18	15
滑川市	19	19	16	16	15	24	16	22	23	13	22	28
黒部市	23	22	18	26	22	20	26	23	20	26	21	22
砺波市	33	22	26	24	28	35	21	32	34	36	31	32
小矢部市	11	13	20	10	12	15	17	11	19	15	16	7
南砺市	30	14	22	15	32	23	25	31	20	26	28	27
射水市	48	66	49	45	46	50	52	55	45	62	52	57
舟橋村	1	2	3	3	2	2	2	3	4	2	3	3
上市町	10	15	9	10	5	7	10	7	7	12	5	10
立山町	5	15	16	11	17	8	8	11	13	15	10	12
入善町	5	13	10	14	11	19	8	15	8	12	4	13
朝日町	13	3	5	2	5	3	5	2	5	2	4	6

出典：富山県統計調査課「平成29年富山県の人口」(市町村別、月別出生者数)より作成

立山くん：10月の出生数を見ると富山市は274，高岡市は100，魚津市は17，…。最高位の数だけを見ると，富山市は2，高岡市は1，魚津市は1，…。こんなふうに資料全体を見ていくと最高位の数(ア)か(イ)が多いような気がする。

そこで，疑問に対してちょっとしたヒントを与え解決に導いてくれる小力先生に相談に行くことにしました。

立山くん：小力先生，質問があります。実は富山県の出生数の資料を見ていたのですが，データの最高位の数だけをながめると，1～9までの数字が均等に出ていないような気がします。

小力先生：とてもいいことに気付いたね。実は都市の人口，株価，川の長さ，スポーツの成績等，サンプル数が多い値の範囲が制限されていないデータは，最高位の数1～9までの数が均等に出ないことが分かっているんだ。

立山くん：え，そうなのですか。てっきり，データの最高位の数1～9までが均等に，すなわち同じ割合(%)で出ると思っていました。では，最高位の数1～9までのどの数が一番多く出るのですか。

小力先生：それを調べたのが，フランク・ベンフォードという技術者なんだ。彼は多くのデータを解析し，最高位の数1～9までの割合(%)で出るかを予想して，そしてその予想を証明したのだ。

立山くん：どのような予想ですか。ぜひ知りたいです。

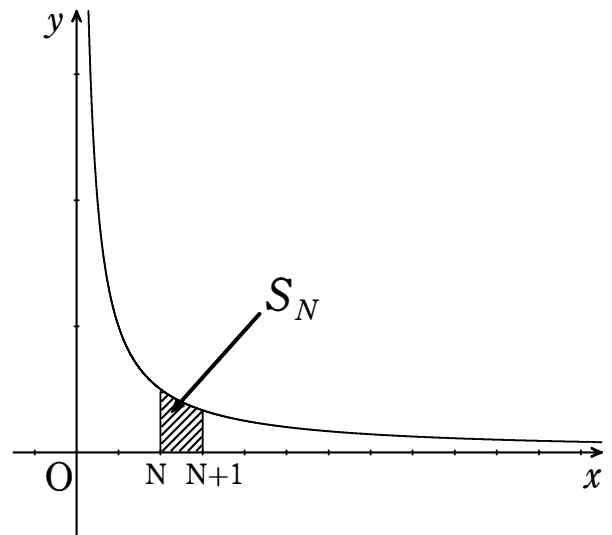
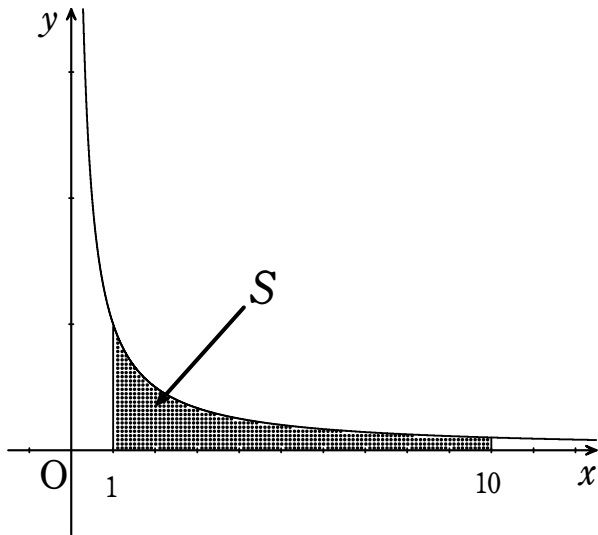
小力先生：では，教えよう。

$x$  軸と  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 1, x = 10$  で囲まれた図形の面積を  $S$  とおく。

次に  $x$  軸と  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = N, x = N + 1$  で囲まれた面積を  $S_N$  とおく。

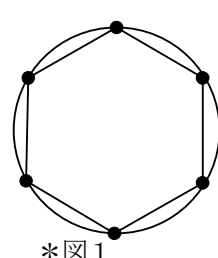
このとき最高位の数  $N$  である割合(%)は  $\frac{S_N}{S} \times 100$  である。

これをベンフォード則というのだ。 -2-

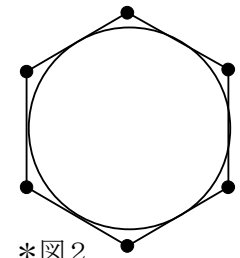


立山くん：ということは、僕の気付きは正しかったのですね。ただ、僕はまだ曲線で囲まれた図形の面積を求めることができないので、1～9までの各数が、最高位の数として出る割合（%）を求めることはできません。

小力先生：では、不等式を作ろう。例えば、半径1の円に内接する正六角形の面積（\*図1）と、半径1の円に外接する正六角形の面積（\*図2）を計算すると、図形の大小関係から（ウ）<π<（エ）、この不等式からπのおおよその値を考えることができるじゃないか。ただし、 $\sqrt{3} = 1.732$ を使おう。



\*図1



\*図2

立山くん：そうか。さらに半径1の円に内接・外接する図形を正十二角形、正二十四角形として、不等式を作っていけばπの値はもっと正確に考えることができますね。

小力先生：さすが、立山くん、その通りだ。さて、ベンフォード則を説明したときのSの値は、

$$S = 2.30$$

と分かっているのだ。だからあと、 $S_1$ に関する不等式を作れば、1が最高位の数として出る割合（%）を計算できるはずなのだ。

立山くん：これでよいですか。図のように

$$A(1, 1), B\left(1, \frac{1}{2}\right), C(1, 0), D(2, 0), E\left(2, \frac{1}{2}\right), F(2, 1)$$

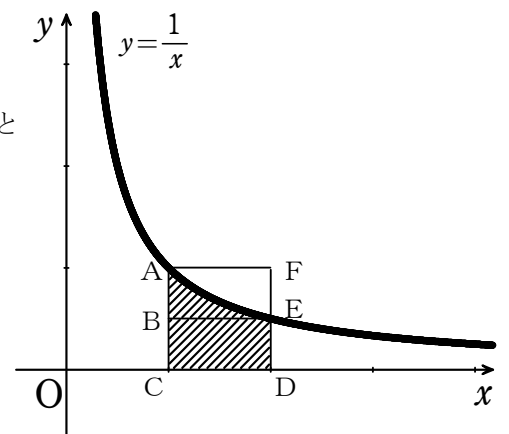
をとり長方形ACDFの面積と長方形BCDEの面積を比較すると

$$\frac{1}{2} < S_1 < 1 \text{ ですね。}$$

小力先生：立山くん、その発想でいいのだけれども、もっと工夫して

$a < S_1 < b$  で  $a, b$  がなるべく  $S_1$  の値に近くなるように

$a, b$  を求めることはできないか。



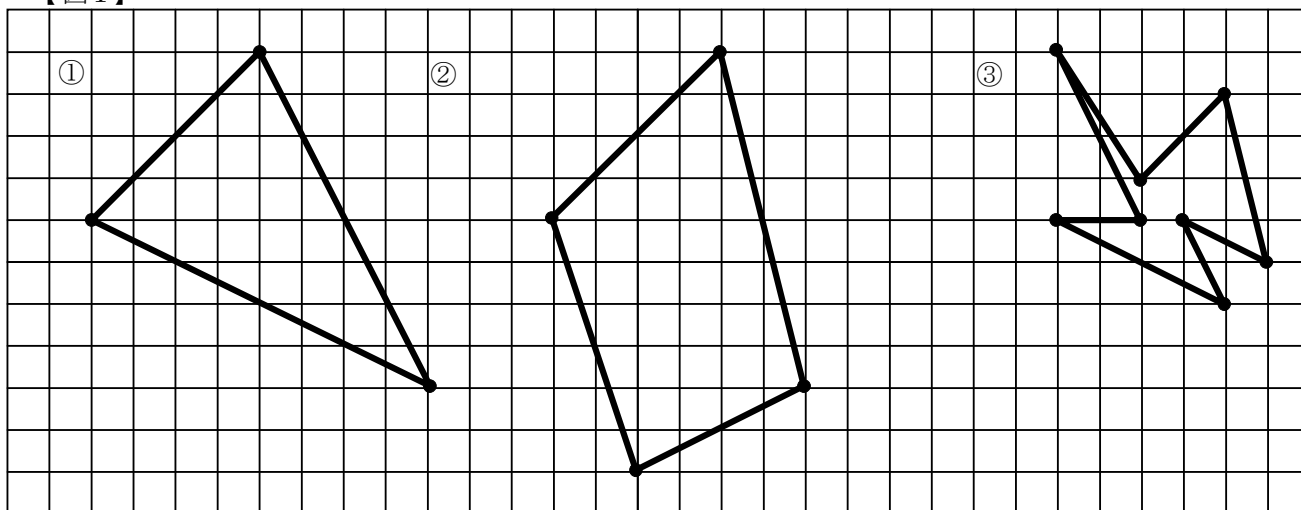
- (1) ア、イに適切な数値を入れなさい。
- (2) ウ、エに適切な数値を入れなさい。
- (3) ベンフォード則を読み取り、最高位の数として5番目に多く出る数を求めなさい。
- (4) あなたの自由な発想で、 $a < S_1 < b$  で  $a, b$  がなるべく  $S_1$  の値に近くなるように  $a, b$  を求めなさい。
- (5) (4) の結果から1が最高位の数として出る割合（%）はどれぐらいか、求めなさい。

3 富山県氷見市の海岸沿いの高台から海を見渡すと、定置網の浮子(漁用のうき)が幾何学的模様キラキラと浮かんでいます。富山湾には大小約 150 もの定置網が敷設されており、漁獲量は県内の沿岸漁業の約 70 % 以上を占めています。定置網は富山県で考え出され、各地に伝わっていったとされています。3つの定置網を上から見た形状を【図1】のように表してみました。

$x$ 座標も  $y$ 座標も整数である平面上の点を格子点といい、頂点がすべて格子点であるような多角形を**格子多角形**と言います。正方形の格子の1辺の長さを1とします。

(1) 次の①～③の格子多角形の面積をそれぞれ求めなさい。

【図1】



(2) さて、格子多角形の面積について

格子多角形の辺の上にある格子点(頂点を含む)の個数を  $x$  とし、内部にある格子点の個数を  $y$  とするとき、その面積  $S$  は

$$S = \boxed{\text{ア}} x + y - \boxed{\text{イ}}$$

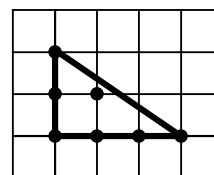
と表される

ことが知られてます(ピックの定理)。格子点の個数を数えるだけで面積が分かるというものです。

(1) の結果を利用して  $\boxed{\text{ア}}$  と  $\boxed{\text{イ}}$  にあてはまる数を求めなさい。

例えば、【図2】の格子三角形の場合では、辺の上にある格子点(頂点を含む)の個数は6、内部にある格子点の個数は1です。

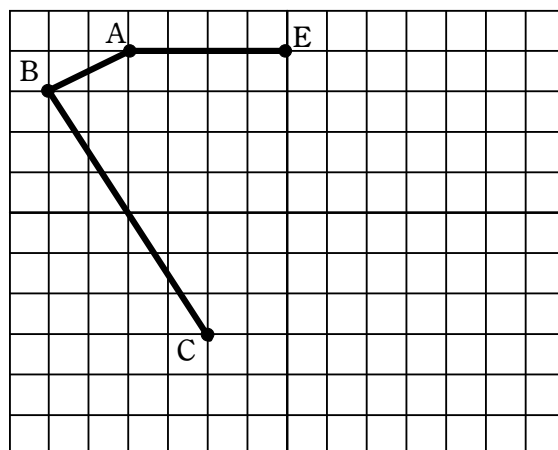
【図2】



(3) 【図3】のように4点 A, B, C, E があります。この

【図3】の格子点から1点 D を選び、格子五角形 ABCDE を作ります。格子五角形 ABCDE の面積が 28.5 になるような点 D を解答用紙の図に記入しなさい。また、考え方も書きなさい。

【図3】



(4) 面積が2の格子多角形をできるだけたくさん描きなさい。

ただし、合同な図形は同一と見なします。

(5) 「すべての頂点が格子点上にある格子正三角形は存在しない」ことを示しなさい。

4 2016年度より富山グラウジーズがBリーグ1部に参入し、FIBAバスケットボールワールドカップ2019アジア地区2次予選が富山市総合体育館で2018年11月30日、12月3日に開催されるなど、バスケットボールが、富山県で盛り上がりを見せています。そこで、リーグ戦やトーナメント戦について簡単なモデルを使って考えてみましょう。

ある競技の大会に  $T$  というチームが参加する。その大会に参加するチーム数は  $n$  チームで、試合は2チームずつの対戦で行われる。 $n$  チームの強さはすべて同じであり、勝つ確率は  $\frac{1}{2}$  である。試合に引き分けはないものとする。

(1)  $n=4$  とし、 $T$  チームを含む4チームが勝ち残りのトーナメント戦を行う。 $n=4$  における勝ち残りのトーナメント戦とは、2試合の準決勝を行い、それぞれで勝った2チームが決勝で戦い、優勝を決定する方式である。このとき、 $T$  が優勝する確率を求めなさい。

(2)  $n=4$  とし、 $T$  チームを含む4チームが総当たりのリーグ戦を行う。すなわち、すべてのチームが3試合を行い、総勝利数が最も多いチームを1位とする。総勝利数が最も多いチームが複数ある場合には、そのすべてのチームを1位とする。

①  $T$  チームが単独で1位となる確率を求めなさい。

②  $T$  チームが1位となる確率を求めなさい。

(3)  $n=8$  とし、 $T$  チームを含む8チームが4チームずつ2つのリーグに分かれて、総当たりのリーグ戦を行う。総勝利数が最も多いチームから1位、2位…とし、上位2チームを決定する。総勝利数が同数である場合には、くじ引きで順位を決定する。これを予選とする。

予選で決定した4チームでトーナメント戦を行い、優勝チームを決定する。トーナメント戦は(1)と同様のものとする。

①  $T$  チームが2勝1敗で予選を通過する確率を求めなさい。

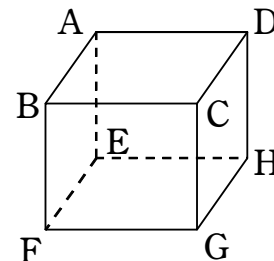
②  $T$  チームが優勝する確率を求めなさい。



5 富山県には様々な食文化があります。南砺市の五箇山地方では、古くから伝統的に作られている五箇山とうふが有名です。縄で縛っても崩れないほど身の詰まった堅さが特徴のとうふです。五箇山とうふの形を1辺が10 cmの立方体  $ABCD-EFGH$  として以下の問いを考えてみよう。

(1) この立方体を平面で切って2つに分けるときの、切り口の図形として考えられるものを以下のものからすべて選び番号で答えなさい。

- ① 三角形    ② 四角形    ③ 五角形  
 ④ 六角形    ⑤ 七角形    ⑥ 八角形



点  $P$  は点  $A$  を出発し、毎秒 1 cm の速さで  $A \rightarrow B$  と動き、点  $B$  で停止する。また、点  $Q$  は点  $C$  を出発し、毎秒 2 cm の速さで  $C \rightarrow D \rightarrow H$  と動き、点  $H$  で停止する。 $x$  秒後に 3 点  $F, P, Q$  を通るような平面でこの立方体を切ったとき、次の問いに答えなさい。ただし、点  $P$  と点  $Q$  は同時に出発するものとする。

- (2) 包丁が線分  $CG$  を通るような  $x$  の値の範囲を求めなさい。  
 (3) 切り口がひし形になるときの  $x$  の値を求めなさい。  
 (4)  $x = 6$  のとき、点  $G$  を含む立体の体積を求めなさい。

