とやま科学オリンピック 2017

（高校部門）

解答例および解説

数　　学
物　　理
化　　学
生　　物

2017 年８月９日(水)

富山県　　富山県教育委員会

とやま科学オリンピック　解答例および解説　高校部門（数学）

1 【出題の意図】スポーツを通し，身近な物事について考察する。

（1）27試合

トーナメントの本戦はトーナメントの組み方に関係なく，優勝選手を除く全選手が負けるまで行われるので，24名では23試合行われる。また，敗者復活戦は4試合行われるので，全行程が終了するまでの試合数は

$23+4=27$

（2）2020試合

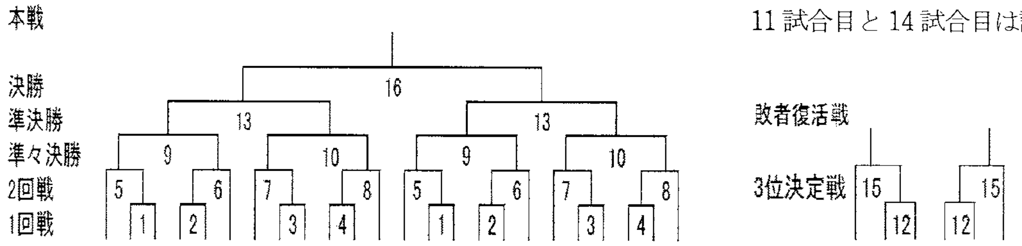
（1）と同様に考えると，本戦は2016試合行われ，敗者復活戦は4試合行われるので，全行程が終了するまでの試合数は $2016+4=2020$

（3）187分

決勝，3位決定戦ともに，準決勝に試合を行ったものが出場するため，準決勝から2試合以上後か試合を行わないで行われる必要がある。また，決勝が最終戦であるので決勝戦の前に3位決定戦が行われればよい。

また，1試合ずつ行われると $8+5+8=21$(分)かかり，試合を行わずに2試合を行うと $10+8=18$(分)かかるので，後者の方が早く終わる。また，3回戦が終わるまでは20試合行うので，最低でも10回試合を行う。

以上のことより1つの例として下のようなトーナメントが考えられる。



11試合目と14試合目は試合を行わない

全行程の時間は

$8\times14+5\times11+10\times2=187$

（4）$\dfrac{120}{\pi}$ m

直線を除いたものが円となるので，

$$\frac{(400-80\times2)}{\pi}\times\frac{1}{2}=\frac{120}{\pi}$$

（5）9.76π m

直線の長さが変わらないので，円の部分で多く走る分だけスタート位置を前にすればよい。第5レーンを走る日本は第1レーンよりも 1.22×4 (m) 外側を走るので，円の半径がその分長くなる。

第5レーンの円の部分の長さは $\left(\dfrac{120}{\pi}+1.22\times4\right)\times2\pi=240+9.76\pi$ (m)

第1レーンの円の部分の長さが240 mであるので，求める長さは 9.76π (m)

<解説>

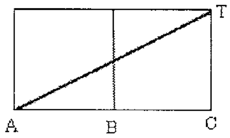
（5）を一般的に考えてみよう。

半径を r，半径の変化を a とすると，変化前の円周の長さは $2\pi r$ であり，変化後の円周の長さは $2(r+a)\pi$ となる。そのため $2a\pi$ のみ長さが変化することがわかる。

中学校の教科書で見た人もいるかもしれないが，地球の周りを糸で1周するのと，地面から1 m上を1周するのでは 2πm しか長くならない。

$\boxed{2}$ 【出題の意図】直感的には分かりにくい直方体の表面の最も遠い点を，図形の性質や連立方程式を用いて考察する。

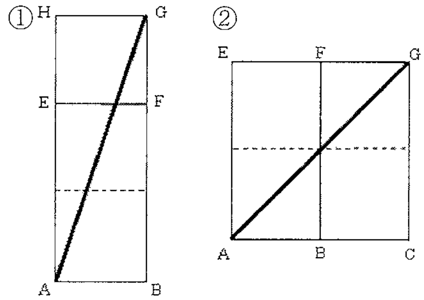
（1）ア　$\sqrt{5}$　　　　$AT=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$



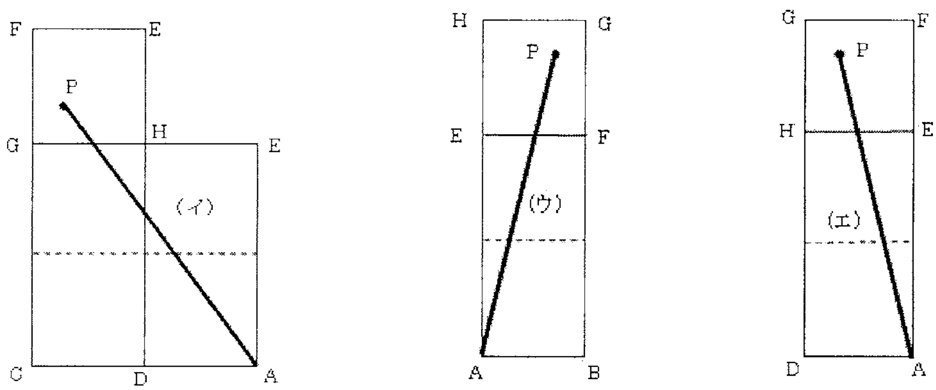
イ　$2\sqrt{2}$

①の経路では$AG=\sqrt{10}$　②の経路では　$AG=2\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}<\sqrt{10}$から　$2\sqrt{2}$を点Aから点Gまでの最短距離と考える。



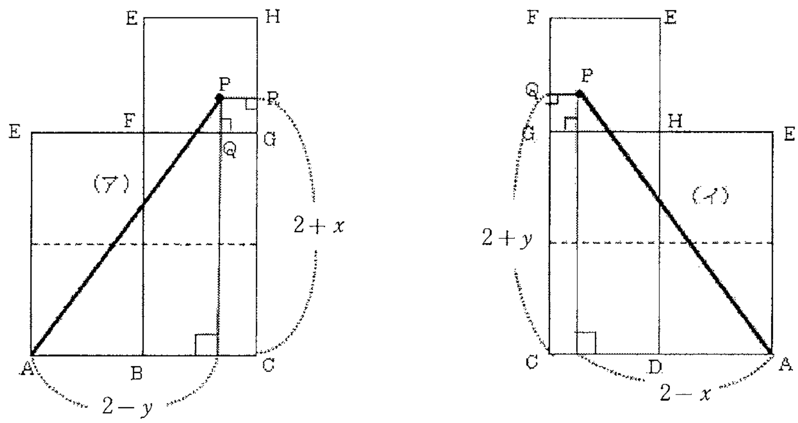
（2）

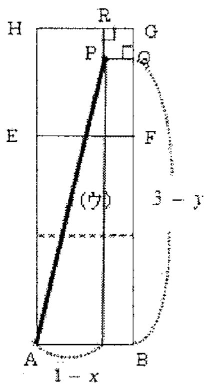


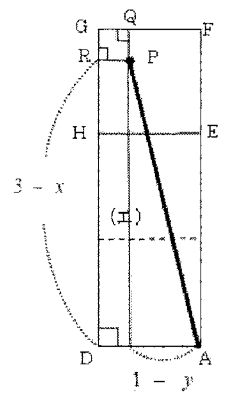
（3）APを斜辺とする直角三角形を作ると　三平方の定理により、APの長さは次のように表される

（ア）$AP=\sqrt{(2-y)^2+(2+x)^2}$　　　（イ）$AP=\sqrt{(2-x)^2+(2+y)^2}$

（ウ）$AP=\sqrt{(1-x)^2+(3-y)^2}$　　　（エ）$AP=\sqrt{(1-y)^2+(3-x)^2}$







（4）（3）の（ア）～（エ）の等式の両辺を2乗すると

$AP^2=(2-y)^2+(2+x)^2$　…（ア）　　$AP^2=(2-x)^2+(2+y)^2$　…（イ）

$AP^2=(1-x)^2+(3-y)^2$　…（ウ）　　$AP^2=(1-y)^2+(3-x)^2$　…（エ）

（ア）（イ）から　$(2-y)^2+(2+x)^2=(2-x)^2+(2+y)^2$

すなわち　$y=x$　これを（イ）（エ）に代入すると

$AP^2=(2-x)^2+(2+x)^2$　　$AP^2=(1-x)^2+(3-x)^2$

すなわち　$(2-x)^2+(2+x)^2=(1-x)^2+(3-x)^2$

これを解いて $x=\dfrac{1}{4}$　　したがって $x=y=\dfrac{1}{4}$

よって　$AP^2=\dfrac{130}{16}$　　$AP>0$より　$AP=\dfrac{\sqrt{130}}{4}$

（5）AP'^2は次の4通りの式で表される。

$AP'^2=(2-y')^2+(n+x')^2$　…　①　　$AP'^2=(2-x')^2+(n+y')^2$　…　②

$AP'^2=(1-x')^2+\{(n+1)-y'\}^2$　…　③　　$AP'^2=(1-y')^2+\{(n+1)-x'\}^2$　…　④

①　②から　$(2-y')^2+(n+x')^2=(2-x')^2+(n+y')^2$

整理すると　$x'(2n+4)=y'(2n+4)$

$n>1$より$2n+4\fallingdotseq 0$　よって　$x'=y'$　これを②　④に代入すると

$AP'^2=(2-x')^2+(n+x')^2$　　$AP'^2=(1-x')^2+\{(n+1)-x'\}^2$

すなわち　$(2-x')^2+(n+x')^2=(1-x')^2+\{(n+1)-x'\}$

これを解いて　$x'=\dfrac{n-1}{2n}$　　したがって　$x'=y'=\dfrac{n-1}{2n}$

（6）（5）で求めた $x'=y'=\dfrac{n-1}{2n}$ に　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots,\ 10,\ \cdots\cdots\cdots,\ 100,\ \cdots$

を順に代入していくと　x',y'の値はともに　$0,\ \dfrac{1}{4},\dfrac{2}{6},\dfrac{3}{8},\dfrac{4}{10},\cdots\cdots,\ \dfrac{9}{20},\ \cdots\cdots\cdots,\ \dfrac{99}{200},\ \cdots$

となり，nの値が大きくなるにつれ$x',\ y'$ は $\dfrac{1}{2}$ に近づいていることがわかる。

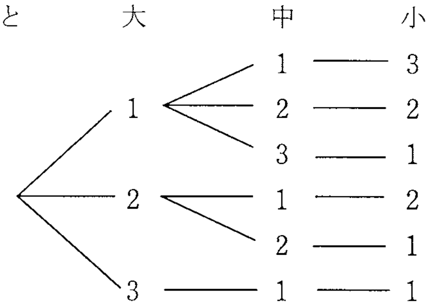
したがって，点Aから最も遠い点は立体の上面の中央に近づいていくことが推測できる。

3 【出題の意図】様々な場面で起こる事柄を，場合の数や確率の基礎的な内容を理解しながら，条件から場合分けや順序よく数えることで規則性を見つけて考察する。

（1） （ア） 1,1,3　1,2,2

（イ） (大，中，小) =(1,1,3)，(1,2,2)，(1,3,1)，(2,1,2)，(2,2,1)，(3,1,1) の 6 通り

樹形図を書くと



これより　6 通り

（2） ${}_7C_3=\dfrac{{}_7P_3}{3!}=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$ 通り

（3） $X_1<X_2<X_3<X_4$であるから　$X_3=3$ のとき

$(X_1, X_2, X_4)=(1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 2, 7), (1, 2, 8)$

$(1, 2, 9), (1, 2, 10)$　の　7 通りある。

（4） 10 枚のカードから 4 枚のカードを取り出すとき，その数は ${}_{10}C_4=\dfrac{{}_{10}P_4}{4!}=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$ 通り

（3）より　全部で 7 通りあるので 求める確率は　$\dfrac{7}{{}_{10}C_4}=\dfrac{7}{210}=\dfrac{1}{30}$

（5） $X_4-X_1=7$　となるのは

$(X_1, X_4)=(1, 8), (2, 9), (3, 10)$　の　3 通りある。

そのとき、X_2 と X_3 は X_1 と X_4 の間にある それぞれ 6 枚のカードがある。X_2 と X_3 は 6 枚のカードから 2 枚のカードを取り出したときになる。

求める確率は　$\dfrac{3\times{}_6C_2}{{}_{10}C_4}=\dfrac{3\times15}{210}=\dfrac{3}{14}$　　$\left({}_6C_2=\dfrac{{}_6P_2}{2!}=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15\right)$

（6） $X_1+2\leqq X_3$，$X_3+1\leqq X_4$であることに注意して

$(X_1, X_3, X_4)=(1, 3, 6), (1, 3, 9), (1, 4, 8), (1, 5, 10), (2, 4, 8)$のときで

そのとき，X_2 は X_1 と X_3 の間の数なので，それぞれ 1，1，2，3，1 通りある。

これらを合わせて　8 通りである。

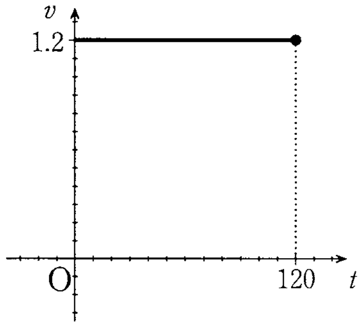
求める確率は $\dfrac{8}{{}_{10}C_4}=\dfrac{8}{210}=\dfrac{4}{105}$

$\boxed{4}$ 【出題の意図】区分求積法の考え方を理解し，曲線のグラフで囲まれた部分の面積の求め方を考える。

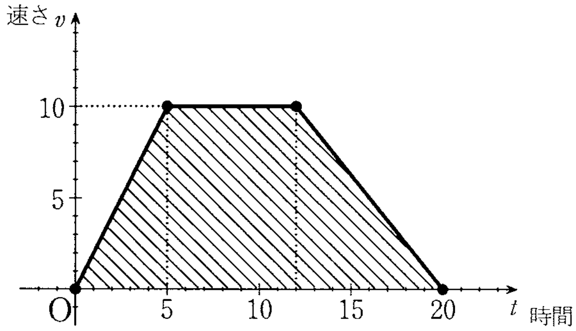
（1）速さが毎秒 1.2 m，移動時間は 120 秒 より

$1.2\times 120=144.0$　　よって移動距離は 144 m

$v-t$ グラフは下の通り



（2）$v-t$ グラフにおいて移動距離は面積で表されるから，下図の斜線部の面積を求める。



$$\frac{1}{2}\times 5\times 10+(12-5)\times 10+\frac{1}{2}\times(20-12)\times 10$$
$$=25+70+40$$
$$=135\ \text{m}$$

＜別解＞　台形の面積とみて，公式 $\{(\text{上底})+(\text{下底})\}\times(\text{高さ})\times\frac{1}{2}$ で計算すると，

$$\{(12-5)+(20-0)\}\times 10\times\frac{1}{2}=27\times 5=135\ \text{m}$$

（3）底辺の長さはすべて $\frac{1}{4}$，高さは左の長方形から $f\left(\frac{1}{4}\right)$，$f\left(\frac{2}{4}\right)$，$f\left(\frac{3}{4}\right)$，$f\left(\frac{4}{4}\right)$ である。

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16},\ f\left(\frac{2}{4}\right)=\left(\frac{2}{4}\right)^2=\frac{4}{16},\ f\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16},\ f\left(\frac{4}{4}\right)=\left(\frac{4}{4}\right)^2=\frac{16}{16}$$

よって，求める長方形の面積の和は

$$\frac{1}{4}\times f\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\times f\left(\frac{2}{4}\right)+\frac{1}{4}\times f\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}\times f\left(\frac{4}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{4}{4}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{9}{16}+\frac{16}{16}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{30}{16}=\frac{15}{32}$$

（4）自然数の和 S_n について，例1と同様に考えて，

$$S_n = 1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \quad 4 \quad + \cdots\cdots\cdots + n \quad \cdots\cdots①$$
$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots\cdots\cdots + 1 \quad \cdots\cdots②$$

①＋②より $2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots\cdots\cdots + (n+1) \quad \cdots\cdots③$

等式③の右辺は $(n+1)$ が n 個あるから，

$$2S_n = (n+1)n$$
$$S_n = \frac{1}{2}(n+1)n$$

自然数の平方の和 T_n について，例2と同様に考えて，

$$\begin{aligned} T_n &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots\cdots\cdots + n^2 \\ &= 1\times 1 + 2\times 2 + 3\times 3 + 4\times 4 + \cdots\cdots\cdots + n\times n \\ &= 1 + (2+2) + (3+3+3) + (4+4+4+4) + \cdots\cdots\cdots + (n+n+n+\cdots\cdots\cdots+n) \end{aligned}$$

表し方を少し変えて

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \quad 2 \\ 3 \quad 3 \quad 3 \\ 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \\ \cdots \qquad \cdots \\ n \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad n \end{array} \qquad \cdots\cdots \mathrm{A}$$

この三角に並べられた数値のすべての合計が T_n となる。さらに表し方を変えてみると

$$\begin{array}{c} n \\ \cdots \\ 4 \quad \cdots n \\ 3 \quad 4 \quad \cdots n \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad \cdots n \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \cdots n \end{array} \qquad \cdots\cdots \mathrm{B}$$

$$\begin{array}{c} n \\ \cdots \\ n \cdots \quad 4 \\ n \cdots \quad 4 \quad 3 \\ n \cdots \quad 4 \quad 3 \quad 2 \\ n \cdots \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \end{array} \qquad \cdots\cdots \mathrm{C}$$

「A」を回転させたものが「B」と「C」である。そしてこれらのすべての合計は $3T_n$ である。

この三角形の数値の和を求める。

三角の左下の数値の合計は　$n+1+n=2n+1$

右下の数値の合計は　$n+n+1=2n+1$

一番上の数値の合計は　$1+n+n=2n+1$

その他の場所も，すべて $2n+1$ である。

A, B, Cを3つ重ねてたすと

$$
\begin{array}{c}
(2n+1)\\
(2n+1)\quad(2n+1)\\
(2n+1)\quad(2n+1)\quad(2n+1)\\
(2n+1)\quad(2n+1)\quad(2n+1)\quad(2n+1)\\
\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
(2n+1)\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad(2n+1)
\end{array}
\quad \cdots\cdots\cdots \mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=3T_n
$$

と表せる。この $(2n+1)$ が何個あるか考えると

$1+2+3+4+\cdots\cdots\cdots+n$ 個あり，

これは自然数の和 S_n だから $S_n=\frac{1}{2}(n+1)n$ 個ある。

よってこの三角の合計 $3T_n$ は $(2n+1)$ が $\frac{1}{2}(n+1)n$ 個あるので

$$3T_n=(2n+1)\times\frac{1}{2}(n+1)n$$

したがって，$T_n=\frac{1}{6}(2n+1)(n+1)n$

（5）（3）の考え方を踏まえて，t 軸の $0\leqq t\leqq 1$ を n 等分すると

各長方形の底辺の長さはすべて $\frac{1}{n}$，

高さは左の長方形から $f\left(\frac{1}{n}\right)$，$f\left(\frac{2}{n}\right)$，$f\left(\frac{3}{n}\right)$，$f\left(\frac{4}{n}\right)$，…，$f\left(\frac{n}{n}\right)$ である。

$f\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1^2}{n^2}$，$f\left(\frac{2}{n}\right)=\left(\frac{2}{n}\right)^2=\frac{2^2}{n^2}$，$f\left(\frac{3}{n}\right)=\left(\frac{3}{n}\right)^2=\frac{3^2}{n^2}$，$f\left(\frac{4}{n}\right)=\left(\frac{4}{n}\right)^2=\frac{4^2}{n^2}$，

……，$f\left(\frac{n}{n}\right)=\left(\frac{n}{n}\right)^2=\frac{n^2}{n^2}$ である。

よって，求める長方形の面積の和は

$$\frac{1}{n}\times f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\times f\left(\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n}\times f\left(\frac{3}{n}\right)+\frac{1}{n}\times f\left(\frac{4}{n}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\times f\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+f\left(\frac{4}{n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\frac{3^2}{n^2}+\frac{4^2}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n^2}{n^2}\right)$$

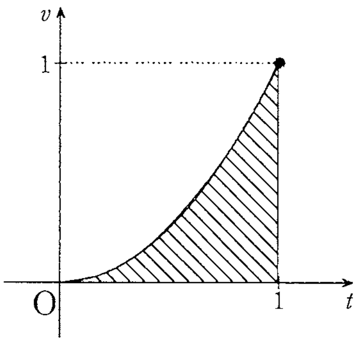
$$=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n^2}(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+n^2)$$

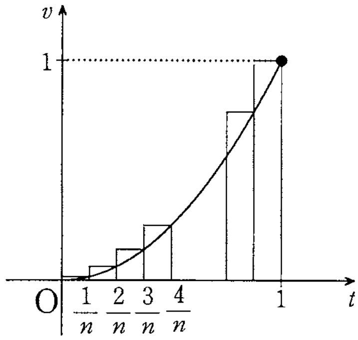
$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+n^2$ は自然数の平方の和 T_n であるから

$$=\frac{1}{n^3}\times\frac{1}{6}(2n+1)(n+1)n$$

$$=\frac{1}{6n^2}(2n+1)(n+1)$$

＜解説＞





左上図の斜線部分の面積は，（５）で求めた右上図の長方形の面積の和について，n を限りなく大きくして求めることができます。

$$\frac{1}{6n^2}(2n+1)(n+1)$$

$$=\frac{(2n+1)(n+1)}{6\cdot n\cdot n}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{2n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\cdots$$

について，n を限りなく大きくすると，$\dfrac{1}{n}$ が 0 に近づくことを利用すると，

（数学Ⅲの教科書では，$n\longrightarrow\infty$ のとき，$\dfrac{1}{n}\longrightarrow 0$ と書いたり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ と表したりします。
また，「∞」は無限を表す記号で「無限大」と読みます。）

$n\longrightarrow\infty$　のとき，$\dfrac{1}{6}\cdot\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\longrightarrow\dfrac{1}{6}\cdot(2+0)\cdot(1+0)=\dfrac{1}{3}$

よって，斜線部分の面積は $\dfrac{1}{3}$ になります。

ただし，実際に斜線部分の面積を求めるときは，数学Ⅱの教科書で学ぶ，定積分を利用して，次のように簡単に求めることができます。

$$\int_0^1 t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1^3-0^3}{3}=\frac{1}{3}$$

（４）で自然数の平方の和を回転させた３つの三角の和より求めたが，次のように求める方法もある。

恒等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$　について

$k=1$ を代入して　$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$

$k=2$ を代入して　$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$

$k=3$ を代入して　$4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1$

$k=4$ を代入して　　　　$5^3-4^3=3\cdot4^2+3\cdot4+1$

$\cdots$

$k=n$ を代入して　　$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$

上の n 個の等式の辺々を加えると，

左辺は　右上の 1^3 と左下の $(n+1)^3$ だけが残り

左辺$=(n+1)^3-1^3=(n^3+3n^2+3n+1)-1=n^3+3n^2+3n$

右辺は　各項を縦にたしていくと

$$\text{右辺}=3\cdot(1^2+2^2+3^2+4^4+\cdots+n^2)+3\cdot(1+2+3+4+\cdots+n)+(1+1+1+1+\cdots+1)$$

$$=3\cdot(1^2+2^2+3^2+4^4+\cdots+n^2)+3\cdot\frac{1}{2}(n+1)n+n$$

よって

$$n^3+3n^2+3n=3\cdot(1^2+2^2+3^2+4^4+\cdots+n^2)+3\cdot\frac{1}{2}(n+1)n+n$$

$$n^3+3n^2+2n=3\cdot(1^2+2^2+3^2+4^4+\cdots+n^2)+3\cdot\frac{1}{2}(n+1)n$$

$$n(n+1)(n+2)=3\cdot(1^2+2^2+3^2+4^4+\cdots+n^2)+3\cdot\frac{1}{2}(n+1)n$$

$$n(n+1)(n+2)-\frac{3}{2}(n+1)n=3\cdot(1^2+2^2+3^2+4^4+\cdots+n^2)$$

$$2n(n+1)(n+2)-3\cdot(n+1)n=6\cdot(1^2+2^2+3^2+4^4+\cdots+n^2)$$

$$n(n+1)\{2(n+2)-3\}=6\cdot(1^2+2^2+3^2+4^4+\cdots+n^2)$$

$$n(n+1)(2n+1)=6\cdot(1^2+2^2+3^2+4^4+\cdots+n^2)$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

自然数の和や，自然数の平方の和は，和の記号 Σ （シグマ）を使って，

$1+2+3+4+\cdots\cdots\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k$，$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$　と表します。

よって　$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ であり，$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ となります。

恒等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$　を用いて，自然数の立方の和が

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

となることを，確かめてみましょう。

$\boxed{5}$【出題の意図】 連分数の有用性や，連分数近似の精度の高さを実感してほしい。また，連分数は，暦や音階，黄金比などにも関わっており，数学の研究でも注目されている。

(1) ① $\dfrac{157}{68}=2+\dfrac{21}{68}=2+\dfrac{1}{\dfrac{68}{21}}=2+\dfrac{1}{3+\dfrac{5}{21}}=2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{\dfrac{21}{5}}}=2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5}}}=[2,3,4,5]$

② $\dfrac{123}{100}=1+\dfrac{23}{100}=1+\dfrac{1}{\dfrac{100}{23}}=1+\dfrac{1}{4+\dfrac{8}{23}}=1+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{\dfrac{23}{8}}}=1+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{2+\dfrac{7}{8}}}=1+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{8}{7}}}}$

$=1+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{7}}}}=[1,4,2,1,7]$

(2) $[1,1,2,3,4]=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4}}}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{13}{4}}}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{4}{13}}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{30}{13}}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{13}{30}}$

$=1+\dfrac{1}{\dfrac{43}{30}}=1+\dfrac{30}{43}=\dfrac{73}{43}$

(3) $[1,2,2,2,2,2,2]=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}}}}=\dfrac{239}{169}=1.41420\cdots\fallingdotseq 1.4142$

＜解説＞

$\sqrt{2}$は小数で表すと，$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ と規則性がありませんが，連分数で表すと $[1,2,2,2,2,2,2,\cdots]$ となり，規則性が表れてきます。$\sqrt{2}$ のおおよその値を問われたとき，小数展開は簡単にはできませんが，連分数で表すと，本問のように無限連分数を途中で止めて，近似値を順に求めることができます。

(4) $\sqrt{3}=1+(\sqrt{3}-1)=1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$

$=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}+1)}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}}}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}}}}$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{3}-1}{2}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}}}=\cdots=[1,1,2,1,2,1,2,\cdots]$$

（5）小数第3位を四捨五入して1.23になったということなので，$1.225 \leqq \alpha < 1.235$

このようなαの中で1.23との差が一番大きいのは$\alpha = 1.225$

このとき，$|\alpha - 1.23| = 0.005 = \dfrac{1}{200}$

よって，$|\alpha - 1.23| \leqq \dfrac{1}{200}$　　　誤差は$\dfrac{1}{200}$以下

（6）（1）②より，$\dfrac{123}{100} = 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7}}}}$

この連分数を延長し，$1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{2}}}}} = \dfrac{262}{213} = 1.230046948\cdots$

誤差は，$0.000046948\cdots < 0.00005 = \dfrac{1}{20000}$

よって，小数近似が1.23となる場合に比べて精度が100倍高い。

（ここまで述べなくても、精度が高いという根拠が示されていればＯＫ）

ゆえに，連分数近似の方が小数近似より精度が高い。

（7）連分数近似は，正しい値よりも少し小さめ，少し大きめの近似が交互に現れる。また，隣り合った近似どうしの差は非常に小さいから。

＜解説＞

小数近似と連分数近似について，次のことが成り立ちます。

αの小数近似として$\dfrac{q}{p}$という分数に直せる小数が出てきた場合，誤差について$\left|\alpha - \dfrac{q}{p}\right| \leqq \dfrac{1}{2p}$となります。

αの連分数近似として$\dfrac{q}{p}$という分数が出てきた場合，誤差について$\left|\alpha - \dfrac{q}{p}\right| \leqq \dfrac{1}{p^2}$となります。

$\dfrac{1}{p^2}$は$\dfrac{1}{2p}$よりずっと小さいので，連分数近似は小数近似より圧倒的に精度がよいのです。

1 レポート

【考察】

製作にあたって、どのようなことに気をつけたか。

・エナメル線を巻くときは、コイルの厚みが均一になるように巻く。
・エナメル線を巻くときは、方向が途中から逆方向にならないよう気をつける。
・各エナメル線の折り返し部分は紙やすりで被膜が残らないよう丁寧にはがす。

など

高校部門　物理

2 レポート

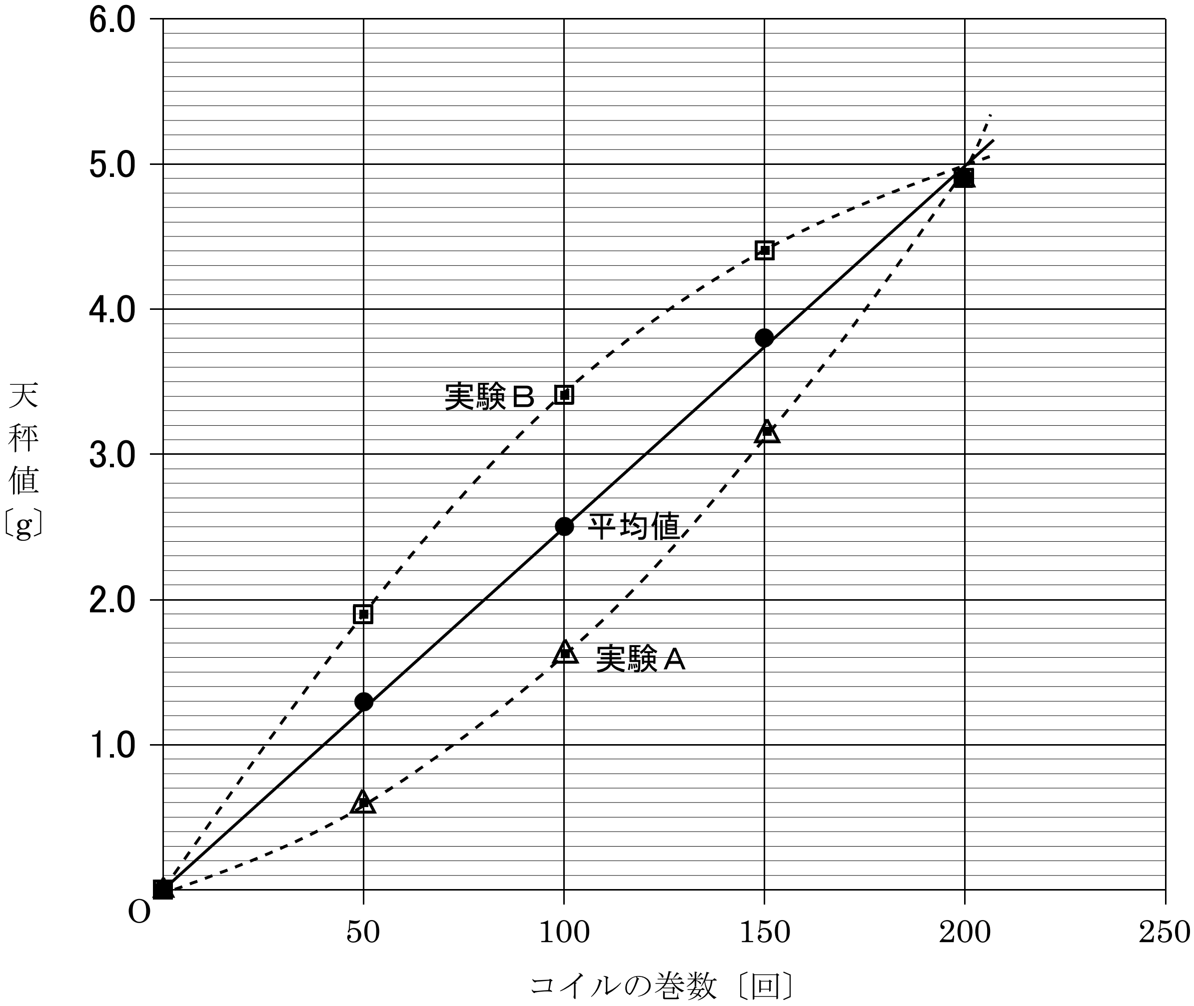
（実験２－１）コイルの巻数と磁力の関係（その１）

【実験結果】

コイルの巻数	実験Ａ〔g〕	実験Ｂ〔g〕	平均値〔g〕
50 回	0.6	1.9	1.3
100 回	1.6	3.4	2.5
150 回	3.2	4.4	3.8
200 回	4.9	4.9	4.9

※コイルの巻数が0回での天秤値（実験Ａ、実験Ｂ）は0〔g〕とする。

【グラフ】



高校部門　物理

$\boxed{2}$ レポート

（実験２－１）コイルの巻数と磁力の関係（その２）

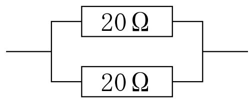
【考察】

(1) 10 Ωの抵抗にするために、20 Ωの抵抗をどのように工夫して抵抗固定器に取り付けたか。

・抵抗 R_1 と抵抗 R_2 を並列接続した場合、その合成抵抗 R_x は、

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ となり、} \qquad R_x = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \text{ となる。}$$

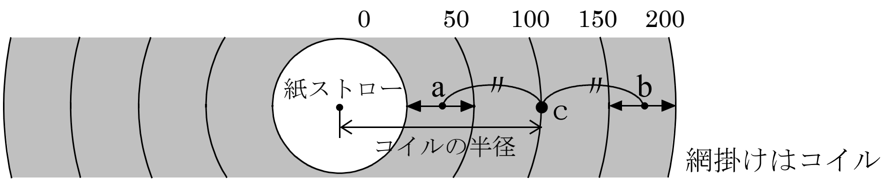
すなわち、$R_1 = 20\ \Omega$、$R_2 = 20\ \Omega$ の場合、２個の抵抗を並列に取り付けると、合成抵抗は 10 Ωになる。



(2) グラフ（実験Ａ、実験Ｂ、平均値）からどのようなことが分かるか。

・実験Ａと実験Ｂの平均値は、各巻数におけるコイルの半径が全て c 点（下図）にあると考えた場合である。平均値のグラフからは、コイルに流れる電流及びコイルの半径が一定のとき、磁石の受ける磁力の大きさ（天秤値）はコイルの巻数に比例する。このことから、<u>コイルによる磁力はコイルの巻数に比例すると分かる。</u>

・コイルに流れる電流が一定のとき、実験Ａと実験Ｂにおいて同じ巻数では、コイルの半径が大きい方が磁石の受ける磁力（天秤値）は大きい。このことから、<u>同じ巻数では、コイルの半径が大きくなるとコイルによる磁力は大きくなると分かる。</u>



各巻数におけるコイルの半径を、エナメル線の巻厚（網掛け部）の中心と考えた場合、例えば、巻数 50 回のコイルでは、実験Ａと実験Ｂの半径の位置は a 点、b 点となり、平均の位置は c 点となる。他の巻数においても同様に考えると、各巻数におけるコイルの半径の平均値は、全て c として考えることができる。

高校部門　物理

2 レポート

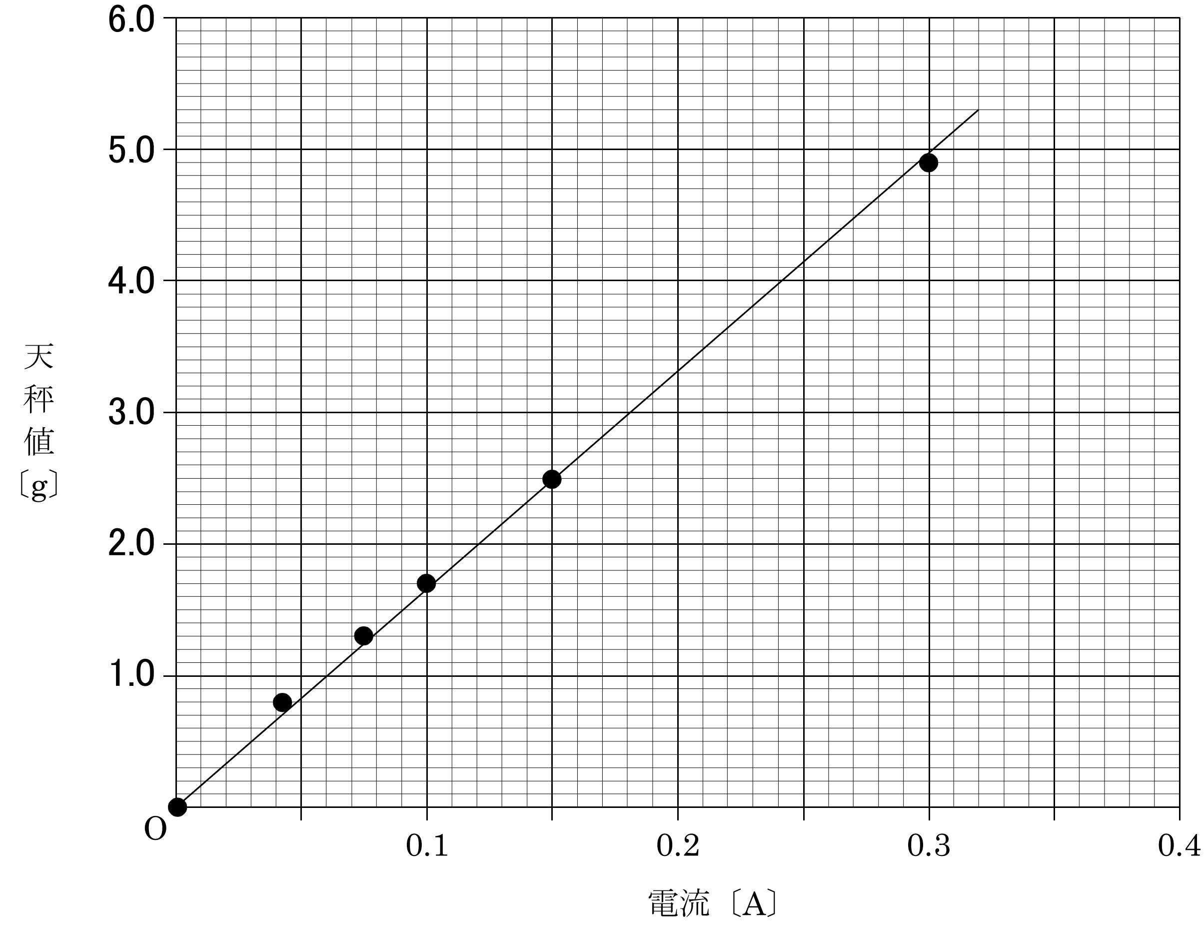
（実験２－２）コイルに流れる電流と磁力の関係（その１）

【実験結果】

抵抗値〔Ω〕	電 流〔A〕	天秤値〔g〕
10	0.30	4.9
20	0.15	2.5
30	0.10	1.7
40	0.075	1.3
70	0.043	0.8

※抵抗値が無限大での電流は 0〔A〕とし、天秤値は 0〔g〕とする。

【グラフ】



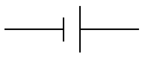
高校部門　物理

2 レポート

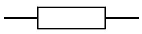
（実験２－２）コイルに流れる電流と磁力の関係（その２）

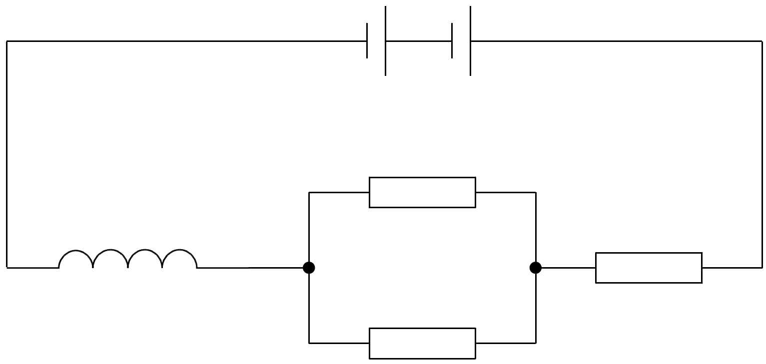
【考察】

(1) 以下の記号を用いて、30 Ωの抵抗を接続したときの回路図を描きなさい。

・1.5 V の電池 1 個 

・200 回巻きコイル

・20 Ω の抵抗 1 個 



(2) グラフからどのようなことが分かるか。

・コイルの巻数が一定のとき、磁石の受ける磁力の大きさ（天秤値）は電流の大きさに比例することが分かる。このことから、コイルによる磁力は、コイルを流れる電流の大きさに比例すると分かる。

3 レポート

（実験３）既知抵抗および未知抵抗における回転角の測定（その１）

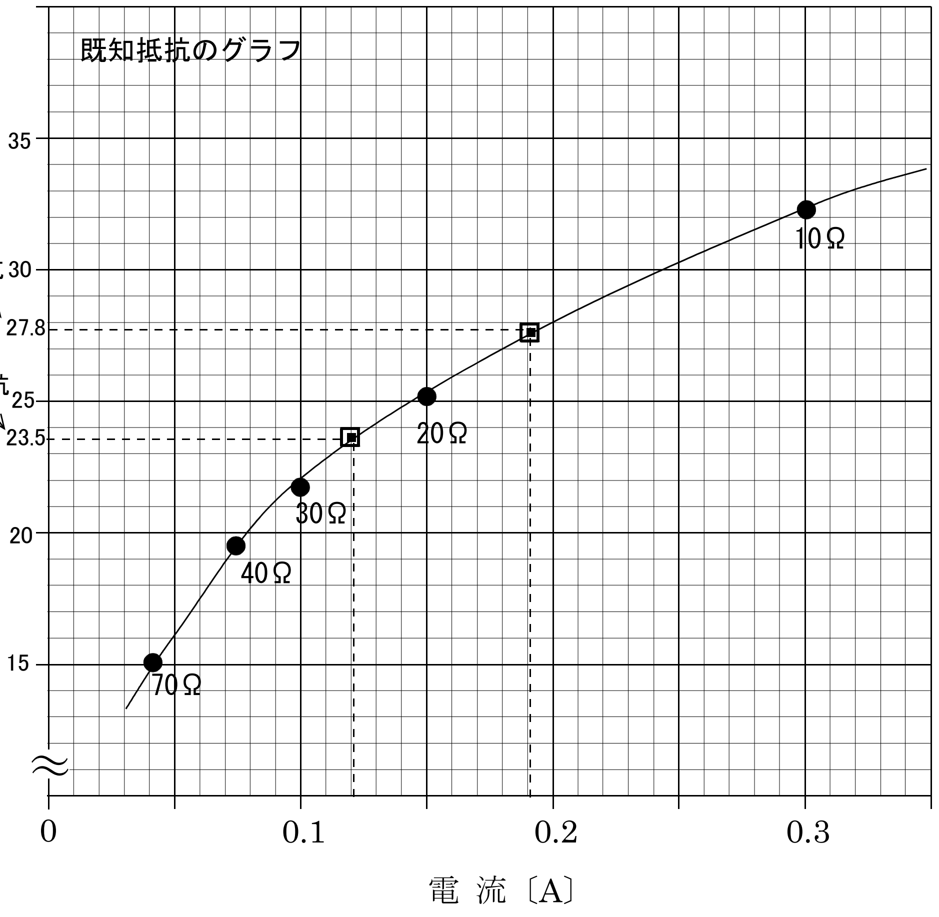
【実験結果】

抵抗値〔Ω〕	電 流 〔A〕	回転角〔°〕
10	0.30	32.4
20	0.15	25.2
30	0.10	21.8
40	0.075	19.5
70	0.043	15.0

未知抵抗１		27.8
未知抵抗２		23.5

【グラフ】

〈一例〉



高校部門　物理

3 レポート

（実験３）既知抵抗および未知抵抗における回転角の測定（その２）

【考察】

(1) 既知抵抗のデータをもとに、未知抵抗の値〔Ω〕を推定しなさい。また、その理由も説明しなさい。

※実験結果（既定値）のグラフに根拠となる印や補助線を記入し示してもよい。
計算を用いた場合は、その計算式も示すこと。

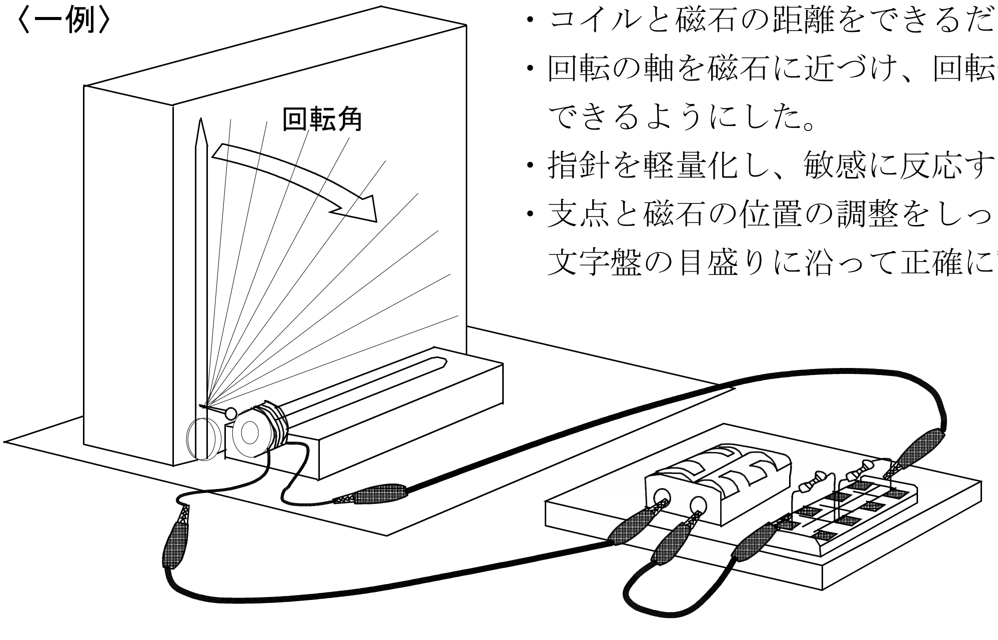
・グラフより、未知抵抗に流れる電流 I は 0.19 A である。
よって、オームの法則（ $V = I \times R$ ）から、未知抵抗 R の値は、次式により計算できる。

$R_1 = 3.0 \div 0.19 = 15.8$　　　$R_2 = 3.0 \div 0.12 = 25.0$

	未知抵抗１	未知抵抗２
電　流	０．１９　　A	０．１２　　A
推定される抵抗値	１５．８　　Ω	２５．０　　Ω

(2) 電流計の製作にあたって自分たちが工夫した点を挙げなさい。なお、図を用いて説明してもよい。

〈一例〉



・コイルと磁石の距離をできるだけ小さくした。
・回転の軸を磁石に近づけ、回転角が大きく測定できるようにした。
・指針を軽量化し、敏感に反応するようにした。
・支点と磁石の位置の調整をしっかり行い、針が文字盤の目盛りに沿って正確に動くようにした。

【 解 説 】

（実験２－１）コイルの巻数と磁力の関係

〇出題のねらい

コイルによる磁力は、コイルの巻数に比例することを実験から考察する。

〇考え方

コイルの巻数と磁力の関係については、ソレノイドの内部に作られる磁場の強さで考えることができる。ソレノイドとは、導線を密に巻いた十分に長い円筒状のコイルのことをいう。ソレノイドの場合、内部の磁場は軸に平行に一様となり、その強さは式(1)のように表される。式(1)からは、磁場の強さは巻数に比例することが分かる。

$$H = nI \quad \cdots (1)$$

ソレノイドの内部の磁場の強さ：H〔A/m〕
流れる電流 ：I〔A〕
単位長さ当たりの巻数：n〔回/m〕

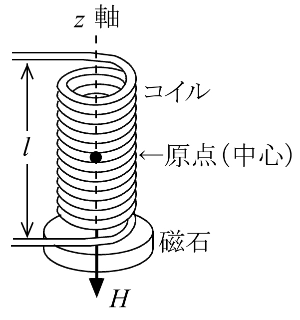
一方、（実験２－１）のような有限なコイルにおいては、コイルの長さや半径を考慮する必要がある。一般に有限なコイルにおける中心軸（z 軸）での磁場の強さは、ビオ・サバールの法則（Biot-Savart law）により、式(2)のように表される。なお、z 軸の原点はコイルの中心とする。

$$H_z = \frac{NI}{2l}\left[\frac{z+\frac{l}{2}}{\sqrt{\left(z+\frac{l}{2}\right)^2+a^2}} - \frac{z-\frac{l}{2}}{\sqrt{\left(z-\frac{l}{2}\right)^2+a^2}}\right] \cdots (2)$$

エナメル線の巻数：N〔回〕
コイルの長さ：l〔m〕
コイルの半径：a〔m〕

また、この磁場が磁気量 q_m〔C〕に与える力 F〔N〕は、式(3)のように表される。

$$F = q_m H_z \quad \cdots (3)$$



そこで、（実験２－１）において、簡単のため次の条件で考える。

（ⅰ）コイルの長さは l であり、その中心を z 軸の原点とする。また、コイルの先端から磁石までの距離は 1mm 未満と小さいので、コイルの先端の位置を $z = \frac{l}{2}$ とする。

（ⅱ）コイルの先端付近での磁場の方向は、z 軸にほぼ平行とする。また、磁石の面積は、コイルの断面積とほぼ同じか、それより大きいことから、コイルによる磁場は、同面積の磁石に対して z 軸方向に平行な力を与えると考える。この場合、磁石の磁気密度を ρ〔Wb / mm^2〕とすると、コイルに作用する磁気量は $\rho\pi a^2$〔Wb〕である。

条件（ⅰ）、（ⅱ）より、コイルと磁石の相互作用による力の大きさ F〔N〕は式(4)になる。

$$F = q_m H_z = \rho\pi a^2 H_z = \frac{\rho\pi NI}{2}\frac{a^2}{\sqrt{l^2+a^2}} \quad \cdots (4)$$

（ⅲ）コイルは、エナメル線を 50 回巻く間は半径を一定とし、巻数が 50 回毎に半径が 1.0mm ずつ増えていくものとする。また、巻数が 50、100、150、200 回のコイル

は半径が異なる50回巻きのコイルを順につなぎ合わせたものとして考える。そこで、コイルの半径及び、各巻数におけるコイルと磁石の相互作用による力 f〔N〕を次の表のようにする。なお、半径 a は、例えばコイル 0–50 の場合、紙製ストローの半径を 3.0mm とし、エナメル線を巻く厚み 1.0mm の $\frac{1}{2}$（中間値）を加えた値とする。

各コイルの巻数 N〔回〕	50 (0–50)	50 (50–100)	50 (100–150)	50 (150–200)
半径 a〔mm〕	3.5	4.5	5.5	6.5
コイルと磁石間の力〔N〕	f_1	f_2	f_3	f_4

コイル	50巻	100巻	150巻	200巻
端子 0 から	$F_1 = f_1$	$F_2 = f_1+f_2$	$F_3 = f_1+f_2+f_3$	$F_4 = f_1+f_2+f_3+f_4$
端子 200 から	$F_1' = f_4$	$F_2' = f_3+f_4$	$F_3' = f_2+f_3+f_4$	$F_4' = f_1+f_2+f_3+f_4$

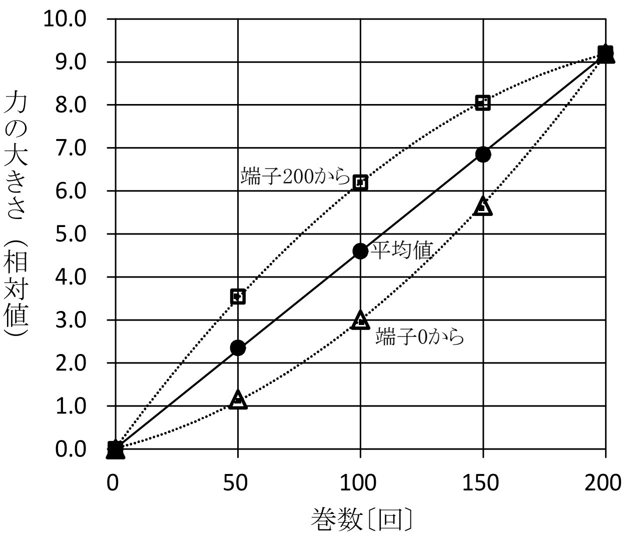
以上の条件において、$\frac{\rho\pi NI}{2}$ および、l は定数となることから、力 F は $\frac{a^2}{\sqrt{l^2+a^2}}$ の a によって変化する。そこで、変数 a に表中の値を代入し計算すると、次のようなグラフになる。計算によるグラフの概形は、**(実験２－１)** の結果のグラフとよく一致する。

コイルと磁石の相互作用による力（相対値）

コイルの巻数	0回	50回	100回	150回	200回
端子0から	0.0	1.2	3.0	5.7	9.2
端子200から	0.0	3.5	6.2	8.0	9.2
平均値	0.0	2.3	4.6	6.8	9.2

※定数 $\frac{\rho\pi NI}{2}$ を 1 とし、l は 10.0mm、a には表中の値（mm 単位）を代入。

※コイルの長さや隣接するコイルによる透磁率などの影響も考えられるが、それらの影響は非常に小さい。



(実験２－２) コイルに流れる電流と磁力の関係

○出題のねらい

コイルによる磁力は、コイルに流れる電流の大きさに比例することを実験から考察する。

○考え方

コイルに流れる電流と磁力の関係については、**(実験２－１)** と同様にソレノイドの内部に作られる磁場の強さで考えることができる。式(1)からは、巻数が一定のコイルにおいて磁場の強さは、コイルに流れる電流の大きさに比例することが分かる。

また、有限なコイルにおいても、式(2)、(3)、(4)から磁場の強さは、コイルに流れる電流の大きさに比例することが分かる。

とやま科学オリンピック　解答例および解説　高校部門（化学）

【ねらい】

1　NaCl の結晶構造やへき開の現象の説明から，直方体をつくり体積や質量を計測することで，岩塩の中に含まれる Na^+と Cl^-の組み合わせの個数を求められることに気づくことができたか。計測した値の意味を考え，解答を導くために論理的な計算ができたか。

2　実験器具を適切に扱い，効率よく実験を行うことができたか。より多くの塩化ナトリウムの結晶を得るために実験操作を工夫することができたか。

3　溶液の調製に適切な実験器具を選び，水素イオン濃度と pH の関係性を理解し，正確に濃度を調製することができたか。調製した簡易指示薬を用いたり，自ら実験操作を考えたりして，白色粉末を特定することができたか。

【解答例】

1

直方体の縦・横・高さをノギスで測定すると，
1.135 cm，0.860 cm，0.810 cm であった。質量は 1.69 g であった。

この岩塩の体積は
$1.135 \times 0.860 \times 0.810 \text{ cm}^3$
$= 0.790 \text{ cm}^3$
である。

また，NaCl 単位格子の体積は

$\left(2 \times 1.16 \times 10^{-8} + 2 \times 1.67 \times 10^{-8}\right)^3 \text{cm}^3$

$= 1.813 \times 10^{-22} \text{ cm}^3$
であり，単位格子中には Na^+と Cl^-が 4 つずつ含まれる。

そのため，この岩塩の中に含まれる Na^+と Cl^-の組み合わせの個数は

$\dfrac{4 \times 0.790}{1.813 \times 10^{-22}}$
$= 1.743 \times 10^{22}$ 個

となる。したがって岩塩 58.5 g あたりに含まれる Na^+と Cl^-の組み合わせの個数は

$1.743 \times 10^{22} \times \dfrac{58.5}{1.69}$
$= 6.03 \times 10^{23}$ 個

となり，岩塩 58.5 g あたりに含まれる Na^+と Cl^-の組み合わせの個数は，6.03×10^{23}個である。

2

【解説】

塩化ナトリウムは，水に溶けやすく，融点（801 ℃）や沸点（1413 ℃）が高いため加熱しても蒸発しにくい。また，しょう油に含まれる大豆や小麦に由来する成分は，加熱により炭になる。炭は水に溶けにくい。

そのため，しょう油を十分加熱して炭化させた後，水を加えると塩化ナトリウムが水に溶ける。これをろ過すると，炭はろ紙上に沈殿として，塩化ナトリウムはろ液中に分離される。このろ液から水分を蒸発させることにより，塩化ナトリウムを取り出すことができる。

【解答例】

	蒸発皿	＋　しょう油	３１．５７ｇ
ー）	蒸発皿		２９．６８ｇ
		しょう油	１．８９ｇ

	薬包紙	＋　塩化ナトリウム	０．５３ｇ
ー）	薬包紙		０．３２ｇ
		食塩	０．２１ｇ

$$質量パーセント濃度 = \frac{0.21}{1.89} \times 100 = 11\%$$

工夫した点

・操作②において，火力を調節してしょう油が吹きこぼれないようにする。

・操作②において，有機物を完全に炭化させるために，十分加熱する。

・操作③において，よく混ぜて塩化ナトリウムを完全に水に溶かす。

・操作④において，ろ紙上の沈殿物を少量の水でよく洗い，塩化ナトリウムをろ液中に移す。

・操作⑤において，蒸発皿の上に時計皿をのせ，塩化ナトリウムが飛び散らないようにする。

など

3 問１

最初に pH が，約 1,3,7,11,13 の水溶液を用意し，そこへ食用色素を水に溶かして作った指示薬を少量入れることにより，色見本を作成した。

Ⅰ　pH = 1,3,7,11,13 の水溶液の作り方

pH = 1 は 0.1 mol/L 塩酸を，pH = 7 は蒸留水を，pH = 13 は 0.1 mol/L 水酸化ナトリウム水溶液をそのまま用いた。

pH = 3 については，100 mL メスシリンダーに 0.1 mol/L 塩酸を 1 mL 入れ，さらに蒸留水を入れて全体を 100 mL として作成した。

pH = 11 については，100 mL メスシリンダーに 0.1 mol/L 水酸化ナトリウム水溶液を 1 mL 入れ，さらに蒸留水を入れて全体を 100 mL として作成した。

Ⅱ　食用色素指示薬の作り方

指示薬の色が薄いと，溶液に多量の指示薬を入れる必要が出てくるため，せっかく調整した pH が変わってしまう。よって指示薬の色が濃くなるよう，少量の水に食用色素を多めに溶かして作った。

Ⅲ　溶液と指示薬の混合

pH を調整した溶液を 1 mL ずつとり，そこに指示薬を 1 滴ずつ，色見本の色がはっきりするまで加えた。薄まり方が等しくなるよう，どの液にも同量の指示薬を入れた。

pH = 1　pH = 3　pH = 7　pH = 11　pH = 13

問２

A は重曹，B はアスコルビン酸（ビタミン C），C は食塩だった。

A

B

C

A は，枠内の物質中で塩基性なのは重曹だけなので，指示薬の色の変化から判断した。（他にも，「0.1 mol/L 塩酸を加えると泡が出たから」などの理由が考えられる。）

B は，枠内の物質中で酸性なのはアスコルビン酸だけなので，指示薬の色から判断した。

C については，指示薬の色の変化から中性の物質だとわかった。枠内には中性の物質が砂糖，食塩，小麦粉の 3 種類あるが，蒸発皿に入れて加熱しても炭化しなかったので，食塩であると判断した。

とやま科学オリンピック　解答例および解説　高校部門（生物）

1

【本問題のねらい】

富山県は全国有数のイネの産地で、コシヒカリを中心にいくつかの品種が栽培されている。また、今年の３月には富山米の新品種が発表された。これを機に、イネやコメについて様々な角度で考えてもらいたいと思い作問した。イネの原産地は中国南部～東南アジアといわれているが、昔から日本人の主食として、日本で育てやすいように、また、少しでもおいしくなるように品種改良がされ続けている。現在では筑波の研究所で、約１ヶ月ほど水田に水がなくても育つイネが開発され、フィリピンで試験栽培されている。

１【解答例】

<table>
<tr><td>（1）</td><td colspan="3">白飯を食べて検査する場合、検査する人は複数名とする。また、基準となる米（白飯）を準備し、基準米と比較して段階を付ける。検査項目を味、香り、硬さ（やわらかさ）、粘りなどに分けて、単純に段階を判定できるようにする。複数名で段階を付けたものを総合して判定する。また、白飯の食味に関わる成分等で調べる場合、うまみに関わる成分（アミロースなど）の含有量、水分量など、数値化できるものを比較し判定する。</td></tr>
<tr><td>（2）</td><td colspan="3">「茎が短く食味の良い品種」のめしべに「高品質で晩生の品種」の花粉を受粉させる。交配により得られた子どうしを自家受精する。その結果得られた子の中から茎が短く食味が良いうえ、高品質で晩生の形質を持つ個体を選び、自家受精を繰り返す。　（「　」の部分は入れ替わっても可。）</td></tr>
<tr><td rowspan="4">（3）</td><td rowspan="2">従来の交雑</td><td>利点</td><td>・できた新品種は自然の中で作られるので、安全性は従来の生物とほとんど同じと考えられる。</td></tr>
<tr><td>欠点</td><td>・目的とする遺伝子をもつ純系の個体を得るのに時間と手間がかかる。
・目的とするもの以外の形質や性質をもつ個体ができることがある。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">遺伝子導入</td><td>利点</td><td>・種の壁を越えて他の生物に遺伝子を導入することができる。
・農作物などの改良の範囲を大幅に拡大できたり改良の期間を短縮したりすることが可能である。</td></tr>
<tr><td>欠点</td><td>・目的とする形質や性質を発現させる遺伝子を特定するのが難しい。
・組み込んだ遺伝子が植物体に定着する成功率が低い。
・作出した農作物については長期的な安全性を確認することが困難である。
・有害物質をつくる品種ができる可能性がある。
・野生種（在来種）が絶滅する可能性がある。
・野生種と交雑をすることにより、雑種をつくる可能性がある。</td></tr>
</table>

【解説】

（1）　主観的な感覚で検査する場合、人による感覚はそれぞれ異なるため、複数名（人数は多い方が精度は上がる）で判定することが必要である。また、極端な結果（最高値，最低値）については、外して平均をとることが多い。食味検査をする米を調べるだけでなく、基準となる米と比較することで、客観性をもたせる必要がある。

例えば、一般財団法人 日本穀物検定協会では「食味官能試験」と「理化学分析」で米の食味検査を実施しており、「食味官能試験」では、食味評価エキスパートパネル 20 名で基準米と試験対象米を比較･評価する方法で検査している。

（2）　品種改良は、親よりも良い性質をもったイネを作るために、ある品種のめしべに別の品種の花粉をかけあわせることからスタートする。このように、人の手で花粉をめしべにかけることを交配という。このとき、めしべに自分の花粉が自然にかかってしまわないように、花の中からおしべ(花粉)を前もって取りのぞいておく必要がある。交配してできた個体は、両親の両方の遺伝子を受け継いでいるが、これを自然の状態で育てると自家受粉を行い、優性遺伝子のみをもつものと劣性形遺伝子のみをもつものなど、いろいろな性質をもつイネが得られる。この中から目標に合う個体を選び(選抜)、自家受精を繰り返すことで純系の個体が得られる(固定)ようになる。ふつう固定させるまでには、交配してから選抜を 6 回～8 回行わなければならない。品種改良の目標どおりのものができたときには、新品種として認められる。

（3）　従来の交雑では、自然淘汰されやすいので、安全性は従来のものと殆ど同じだと考えられるが、1 回の交雑では目的とする形質や性質をもつ純系は作れないので、純系ができるまで何代も交雑をし続けなければならない。そのため膨大な手間と時間がかかる。また、目的とする形質以外の遺伝子ももつので、目的外の形質や性質をもつ個体になる可能性もある。

遺伝子を導入して新品種を作る場合は、目的とする遺伝子のみを導入するので、例えば自然界ではパンジーとバラとの雑種はできないが、パンジーがもつ花の色を青くする遺伝子のみをバラに導入すると、青いバラを作ることができるように、種を超えて他の生物に遺伝子を導入することができる。また、何代も交雑をし続けなくてもいいので、手間と時間がそれほどかからない。しかし、目的とする遺伝子を特定するためには膨大な労力を要し、組み込んだ遺伝子が植物体に定着する確率がまだ低い。また、遺伝子についての研究が始まってからまだそれほど年月が経っていないので、新品種の農作物の長期的な安全性は未確認で、将来生態系を乱す可能性もある。

２【解答例】

（4）	デンプンはグルコースが多数結合してできている。そのグルコースが多数結合していると青色、アミラーゼによりデンプンの分解が進み、結合数が少なくなるにつれて紫色→赤紫色→褐色→無色の順に変化すると考えられる。	
（5）	（酵素）A	
（6）	⑥	
（7）	酵素Cによって分枝を無くし、次に酵素Bでグルコースを2つずつ切断、最後に酵素Aによってグルコースを切り離すと効率が良い。	

【解説】

（4）　デンプンはグルコースが多数結合してできている。デンプンとアミラーゼを混合すると、アミラーゼがグルコースどうしの結合を次々と切っていくので、グルコースどうしの結合の度合いによって色が変化していく。

（5）　グルコースは図1のように六角形の環状構造1個でできている。酵素Aは1-4結合をランダムに切断するが、すべての1-4結合を切断するまで働き続けるので、やがてグルコースのみになる。

３【解答例】

（8）	（例） ・虫が花の中に入り込みにくい形態になっている。 ・花の中に風が吹き込みにくい形態になっている。 ・葯と柱頭が近接している。 ・おしべとめしべが同熟する。	
（9）	利点	（例） ・純系を作りやすく雑種を作りにくい。 ・花弁や蜜を作るコストを下げることができる。 ・不要な形質や性質の遺伝子をもちにくい。 ・大量の花粉を作らなくて済む。 ・種子を確実に作ることができる。
	欠点	・遺伝子の組合せの多様性が低下し、環境の大きな変化に対して適応しにくかったり、加害力の高い病虫害が発生した際に被害が深刻になったりする。 ・その種にとって有害な劣性遺伝子がホモ化し、生存力が低下することがある。

<table>
<tr><td>(10)</td><td colspan="7">多年生植物は、春夏秋冬全ての季節に適応しなければいけない。また、年によって平均気温や降水量などある程度のばらつきがある。よって、環境の変化に適応しやすいようにするため、遺伝子の多様性がある方がよい。よって、他家受粉。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(11)</td><td>i</td><td>胚</td><td>Aa</td><td>胚乳</td><td>AAa</td><td>種皮</td><td>AA</td></tr>
<tr><td>ii</td><td colspan="6">ウルチ型　：　モチ型　＝　５　：　３</td></tr>
<tr><td rowspan="5">(12)</td><td>i</td><td colspan="6">(例)
・ウルチ米の胚乳は半透明に近いが、モチ米の胚乳は不透明な白である。
（・ウルチ米はモチ米よりも細長く、モチ米の方が卵形に近い。）</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ii</td><td colspan="2">スケッチした米の種類</td><td colspan="2">ウルチ米　もしくは
モチ米</td><td colspan="2" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">iii</td><td>ウルチ米</td><td>色
青紫色</td><td colspan="4">構造上の特徴
デンプンは長いグルコース鎖からできている。</td></tr>
<tr><td>モチ米</td><td>色
赤褐色（褐色）</td><td colspan="4">構造上の特徴
比較的短いグルコース鎖からできている。</td></tr>
</table>

【解説】

（８）　自家受粉とは、葯の中でつくられた花粉が同じ花の中にあるめしべの柱頭に受粉することである。それに対し、他の花でつくられた花粉が別の花のめしべの柱頭に受粉することを他家受粉という。自家受粉するためには、花の構造として虫が入りにくかったり、風で運ばれてくる花粉が受粉しにくかったりする必要がある。花弁は虫を誘因する働きもあるので、自家受粉する花にとっては必要性が低い。そのため、花弁をつくるためのエネルギーを節約し、花弁を作らない種も多い。

（９）　ゾウリムシは生育環境がいいときは分裂によって増え続けるが、環境が悪化してくると遺伝子の一部を交換し合って環境に適応しようとする。また、同じまたはよく似た遺伝子型同士の交配を続けると、生存力が低下することがある。その例としてカブトムシが有名である。動物園で飼育されている動物では、よく似た遺伝子型同士の交配を防ぐために、施設どうしで雄または雌を交換し合うことがある。

(11)　純系のウルチ型とモチ型を交雑すると子はすべてウルチ型になるので、ウルチ型が優性形質で、モチ型が劣性形質である。また、父方と母方、どちらがウルチ型またはモチ型でも同じ結果になるので、雌雄共通してもっている染色体上にこの遺伝子があることがわかる（性によってもっている遺伝子が異なる性染色体上ではない）。

ⅰ．　純系のウルチ型の親の遺伝子型はＡＡ、モチ型の親のはａａなので、親　♀ＡＡ×ａａ♂　→　子の胚の遺伝子型はすべてＡａ。胚乳の遺伝子型はＡＡａ（めしべにできる中央細胞には核が２つある)。優性の法則が成り立つのですべてウルチ型になる。子がつくる配偶子はA：ａ＝１：１。よって、子どうしで交雑すると右表のように、ＡＡＡ：ＡＡａ：Ａａａ：ａａａ＝1：1：1：1 となり、ウルチ型：モチ型＝3：1 になる。

♀＼♂	A	a
A、A	AAA	AAa
a、a	Aaa	aaa

ⅱ．　子の配偶子の遺伝子型はＡａ。よって、孫の胚の遺伝子型は右表のようにＡＡ：Ａａ：ａａ＝1：2：1。
任意に 100 本選んだ場合、確率で考えるとＡＡを 25 本、Ａａを 50 本、ａａを 25 本選ぶことになる。
それぞれ１本当たりの遺伝子型と数は、
ＡＡ×ＡＡ→4ＡＡ。　　Ａａ×Ａａ→ＡＡ、2Ａａ、ａａ　　ａａ×ａａ→4ａａ。
よって、4ＡＡ×25＋（ＡＡ+2Ａａ＋ａａ）×50+4ａａ×25＝150ＡＡ＋100Ａａ＋150ａａ。
まとめるとウルチ型：モチ型＝250：150＝5：3。

♀＼♂	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

(12)　実験方法通りに乾燥しないように気をつけながらできるだけ水平に薄く削れるときれいに観察できるプレパラートができる。

ⅰ．　ウルチ米はアミロースが約 25%、アミロペクチンが約 75%でできているが、モチ米はアミロペクチンがほぼ 100%である。収穫したときはどちらも半透明だが、乾燥させるとアミロペクチンの隙間に空気が入り白くなるので、ほとんどアミロペクチンでできているモチ米はウルチ米よりも白くなる。

ⅱ．　枠で囲んだ部分は胚（胚芽）である。将来芽になる部分や、根になる部分を描いてほしい。

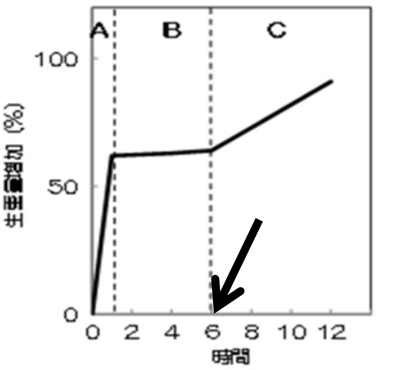
ⅲ．　１ページの文１より、デンプンを構成しているグルコースについて、結合しているグルコースの数が少なくなるにつれて青色→紫色→赤紫色→褐色→無色になっていく。よって、ウルチ米のデンプンは長いグルコース鎖からできていて、モチ米のデンプンはそれよりも短いグルコース鎖からできていることがわかる。

2

【本問題のねらい】

受精によってつくられる種子には、体細胞分裂を繰り返してある程度まで成長した胚が入っている。胚はこのまま成長を続けるのではなく、休眠状態となっていったん成長を止める。種子は適度な水分と、温度や酸素など発芽に必要な条件がそろうと休眠が打ち破られ、発芽する。休眠が打破されてから発芽するまでの間に種子内で起こる変化についての理解を深めさせたい。

1 【解答例】

<table>
<tr><td>(1)</td><td>A</td><td>③、④</td><td>B</td><td>②</td><td>C</td><td>①</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="6">
</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="6">コムギは嫌気条件だと胚乳のデンプンを分解することができず、生育に必要なエネルギーを得ることができない。水中では発芽できないので、水田ではなく、酸素の豊富な畑で栽培する。</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td colspan="6">固く厚い種皮を持つ種子が発芽するためには、種皮をやわらかくするために多くの水が必要となる。それほど多くの水がある場所でなら、発芽した後に根を張りめぐらせるまでに十分な水があることになる。種子は水不足にならずに発芽することができる。また、発芽に適した条件が整うまでの間、乾燥や暑さ、寒さなどの環境に対して、厚い種皮の方が耐えやすいという利点がある。</td></tr>
</table>

【解説】

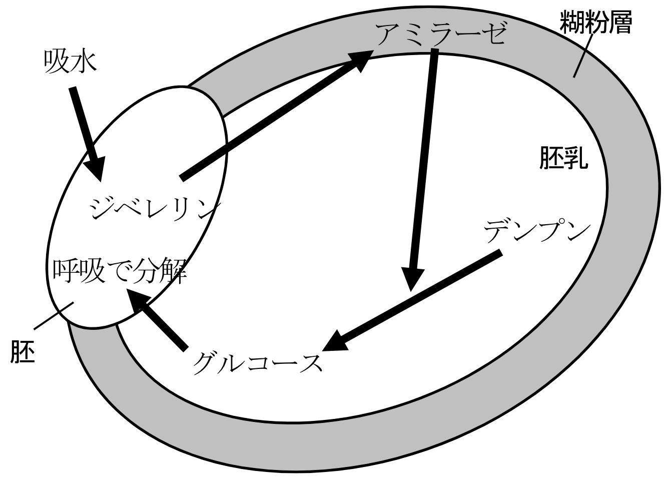
(1)(2)　種子の発芽に必要な吸水は、物理的吸水期（A期）、吸水の一時停止期（B期）、定常的な吸水期（C期）の三段階にわたっておこる。物理的吸水期には、種子は受動的に水を吸い、その重量を増加させる。種子内の酵素は水によって活性化される。吸水の一時停止期は胚の成長のための準備期間である。図2より、O_2吸収量がCO_2排出量を上回るようになっていることから、好気呼吸が盛んになることがわかる。種子内では、芽や根を形成する細胞を分裂させるための物質やエネルギーが合成されている。この時期が終了すると種子は発芽する。発芽後は、幼根や幼芽の成長に伴い生重量が増加し、定常的な吸水がみられる。

(3)　イネとコムギの種子は胚乳にデンプンを貯蔵し、これを分解してエネルギーを得ることにより、胚は成長して発芽する。図3より、イネは好気条件と嫌気条件のいずれで吸水させてもデンプン量が減少している。イネはどちらの条件であってもデンプンを分解してエネルギーを得ることができ、発芽する。一方、コムギは好気条件ではデンプン量が減少するが、嫌気条件ではデンプン量の変化がほとんどみられない。コムギは嫌気条件ではデンプンを分解してエネル

ギーを得ることができず、発芽できない。また、イネは地上部と根をつなぐよく発達した通気系をもっている。地上部から根への酸素供給系は、イネの場合、オオムギよりも 10 倍高性能である。水田に生育するイネの根の呼吸に要する酸素は、この地上部からの供給により十分まかなわれる。

（4）　種子は固く厚い種皮で、乾燥や暑さ、寒さなどの環境から身を守り、適切な場所と時期に生育できるように発芽のタイミングを図っている。固く厚い種皮を持つことで、病原菌の侵入を防いだり、衝撃や圧力で胚が傷つくことも防いだりしている。また、植物は種子が動物に食べられて糞と共に排出されることで、生育地を広げることができる。この時も、固く厚い種皮は消化されにくいという利点がある。固く厚い種皮を持つ種子は、発芽まで時間がかかる上に、種子を一斉にまいても発芽の時期がバラバラにずれる。ずれが生じることで、乾燥や暑さ、寒さによって全滅するリスクを避けることができる。発芽の時期がずれるという性質は、同時に発芽させて栽培する植物の場合、都合が悪いものとなる。そのため、アサガオやオクラなどは種皮に傷をつけて吸水させてから種子をまくことで、発芽を早め、発芽の時期をそろえることができる。

2【解答例】

<table>
<tr><td rowspan="2">（5）</td><td>【説明】
種子が吸水すると、胚でジベレリンが作られる。ジベレリンは糊粉層にはたらきかけて、アミラーゼを合成させる。アミラーゼは胚乳に含まれているデンプンをグルコースに分解する。グルコースは胚に供給される。胚では、グルコースを呼吸基質として分解し、ATP を得る。この ATP を使って、細胞分裂や代謝を活発に行い、胚を成長させて発芽する。</td></tr>
<tr><td>【図】

</td></tr>
<tr><td>（6）</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>胚のみ</td><td>胚乳のみ</td><td>糊粉層のみ</td><td>胚と胚乳</td><td>胚と糊粉層</td><td>胚乳と糊粉層</td></tr>
<tr><td>蒸留水</td><td>＋</td><td>＋</td><td>＋</td><td>＋</td><td>－</td><td>＋</td></tr>
<tr><td>ジベレリン水溶液</td><td>＋</td><td>＋</td><td>－</td><td>＋</td><td>－</td><td>－</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

（6）	【理由】 　種子内でアミラーゼが合成されるとデンプンが分解され、ヨウ素デンプン反応はみられない。種子に蒸留水だけを吸水させた場合、アミラーゼが合成されるためには胚と糊粉層の両方が存在することが必要である。種子にジベレリン水溶液を吸水させた場合では、吸収したジベレリンが糊粉層に働きかけるので胚は不要となり、糊粉層が存在するとアミラーゼが合成されるから。
（7）	デンプンは水に溶けにくいため、種子内を移動しにくい。休眠中の状態が長時間続いたとしても、種子内を安定な状態に維持できる。

【解説】

（5）　胚に供給されたグルコースは、呼吸基質として分解される他に、細胞壁などの生体分子の素材としても用いられる。

（7）　デンプンは水に溶けにくいため、水分が少ない休眠中の種子で浸透圧の上昇を防ぎ、安定な状態で貯蔵することができる。また、アミラーゼが合成されない限り、デンプンが単糖類に分解されることはないので、微生物による繁殖加害も生じにくい。

3 【解答例】

<table>
<tr><td>実験結果</td><td>
① 播種前の種子
<table>
<tr><td>グルコース濃度</td><td>－</td></tr>
</table>
② ABA（＋）
<table>
<tr><td></td><td>播種１日後</td><td>播種２日後</td></tr>
<tr><td>グルコース濃度</td><td>－</td><td>－</td></tr>
</table>
③ ABA（－）
<table>
<tr><td></td><td>播種１日後</td><td>播種２日後</td></tr>
<tr><td>グルコース濃度</td><td>－</td><td>±</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>（8）</td><td>　アブシシン酸は、胚乳内のデンプンがグルコースに分解される反応を抑制する作用があると考えられる。（アミラーゼが合成される反応を抑制する作用がある。）</td></tr>
</table>

【解説】

（8）　種子が成熟する際にアブシシン酸の含有量が増え、その作用により、貯蔵物質の蓄積と脱水が誘導されて、種子は乾燥に対する耐性を獲得する。そして胚は活動を停止し、休眠に入る。発芽能力のある種子が吸水すると、ジベレリンが盛んに合成される。種子中のアブシシン酸含有量は、吸水後は急激に減少する。そして、ジベレリン含有量が高まって、そのはたらきが休眠を維持しようとするアブシシン酸のはたらきを上回ると、発芽に必要な様々な反応が引き起こされる。