とやま科学オリンピック 2015

数　学

（高校部門）

2015 年 8 月 12 日(水)

時間: 9 時 45 分～12 時 15 分(150 分)

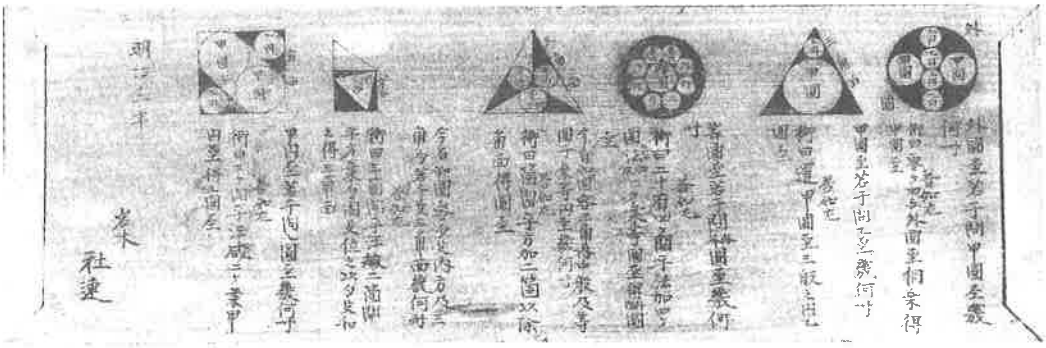
注意事項

１．指示があるまで、問題冊子を開かないこと。
２．問題は$\boxed{1}$から$\boxed{5}$まで１１ページにわたって印刷してあります。
３．解答はすべて解答用紙に記入し、解答用紙だけを提出すること。
４．解答用紙は５枚あります。
５．参加番号を解答用紙の決められた欄に記入すること

みなさんの健闘を期待しています。

富山県　　富山県教育委員会

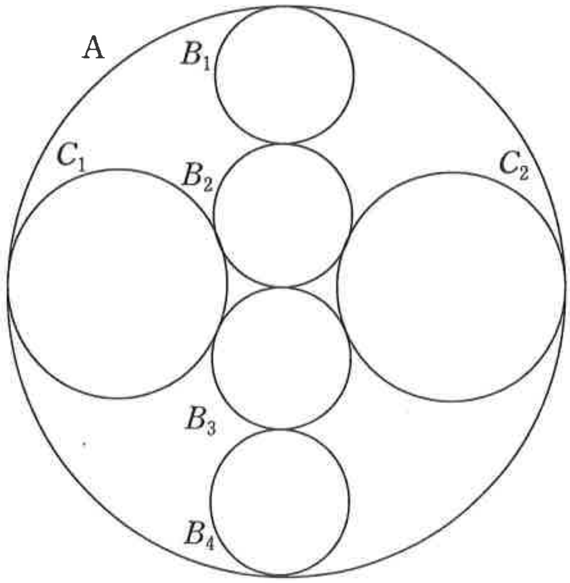
1



「算額」　　　　南砺市荊波神社奉納　射水市新湊博物館提供

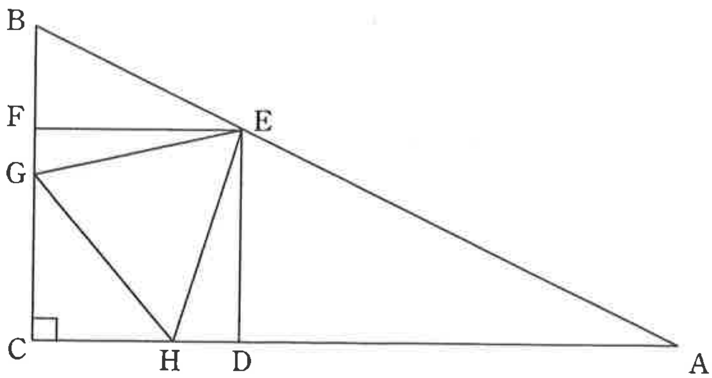
みなさん，算額を知っていますか？算額とは和算独特の風習で，数学の問題が解けたことに感謝し，その問題と答えを額に表し神社仏閣に奉納した額のことです。このような算額奉納の風習は世界にも例が無く日本独自のものですが，実は富山県にも算額が奉納された神社があり，私たち富山県の祖先も算数･数学に興味を持っていたことがよくわかります。では南砺市荊波（うばら）神社に実際に奉納されている問題を解いてみましょう。

（1）上の算額の右から1番目の問題です。



右図のように，円Aの直径上に中心を持つ半径が等しい４つの円B_1，B_2，B_3，B_4がある。ただし，円B_1，B_4は円Aに内接し，B_1 と B_2，B_2 と B_3，B_3 と B_4は外接している。また，円C_1とC_2はそれぞれ円Aに内接し，円B_2 と B_3に外接している。円Aの半径を20としたとき円C_1の半径を求めよ。

（2）上の算額の右から5番目の問題です。



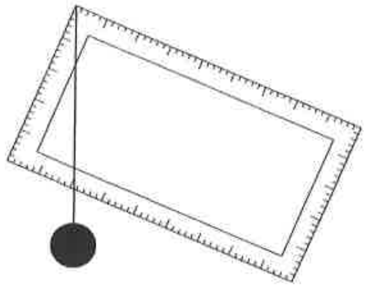
上図のように直角三角形ABCがあり，斜辺AB上に点E，辺BC上に点F，辺CA上に点Dを取り，正方形CDEFを作る。また，辺FC上に点G，辺CD上に点Hを取り正三角形EGHを作る。BC＝a，CA＝b として正三角形EGHの一辺の長さをa,bで表せ。

このページに問題はありません

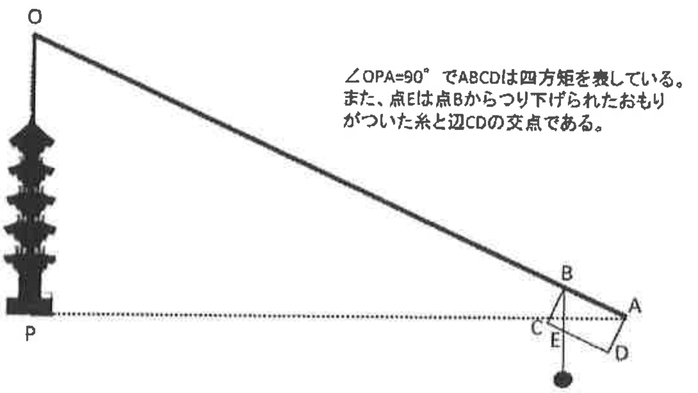
2 富山湾は，日本海側最大の外洋性内湾で魚資源が豊富な自然のいけすと言われています。また，富山には雄山をはじめとする立山連峰がそびえ，山の幸も豊富です。

さて，今でこそ，技術の進化で簡単に地形を見ることができますが，そのような技術がない江戸時代にすでに，伊能忠敬（1745－1818）が日本全図を測量し，現在の地図と比較しても遜色のない正確な地図を作成しました。富山周辺の測量を行った際，富山出身の数学者である石黒信由も測量に参加しています。

数学では，三角比を用いた三角測量が有名ですが，江戸時代の測量の方法に「四方矩（よほうく）」（右図）を使う方法がありました。この器具は，長方形の板の一つの頂点からおもりが糸でつり下げられ，各辺に長さの目盛があるので，一辺を測りたい目標に向けて傾け，その時の糸の位置の目盛を読むようになっています。

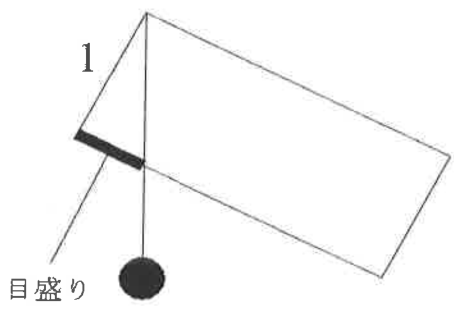


（1）四方矩を使うと五重塔などの高さをおおよその値で求めることができます。下図で，$AP=95.5$(メートル), $BC=1, CE=0.33$としたとき、五重塔の高さは何メートルか求めなさい。ただし、小数第2位を四捨五入して小数第1位まで求めよ。

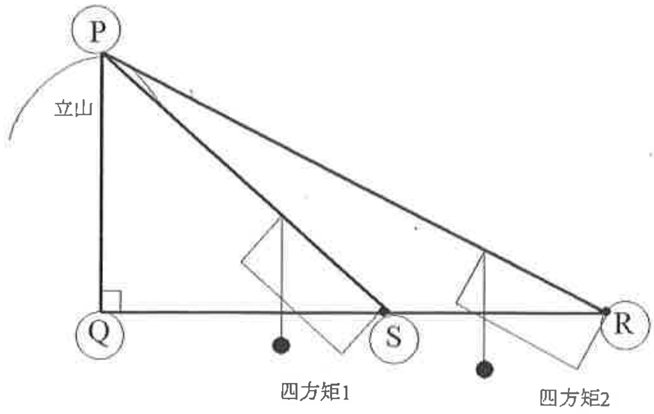


この方法では，APの長さ（塔のてっぺんから真下の点P）がわからないような山の高さなどは、計算することができない欠点があります。

以下，四方矩の短い方の辺の長さを1とし，
下の図の太線の部分を「目盛り」と呼ぶことにします。

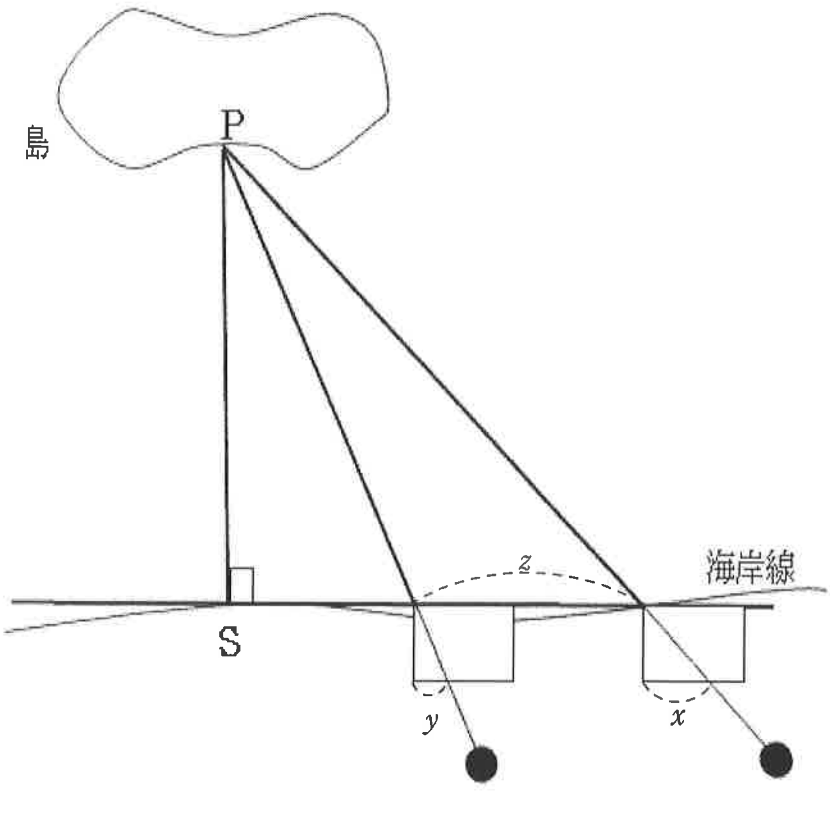


（2）しかし，上記の欠点は下の図のように２つの四方矩を使うことによって見事に克服され，山の高さなどを測ることに成功しています。四方矩1の目盛り1.3，四方矩2の目盛り1.25，
$RS=92.5$(メートル)としたとき，立山の高さは何メートルか求めなさい。ただし，小数第２位を四捨五入して小数第1位まで求めよ。



伊能忠敬は，上陸できない離れ島（たとえば淡路島や佐渡島）は，海岸から見えた図で横向きに表しています。実際に，測量できなかったのです。

（3）四方矩を水平に置いて利用することで，海岸から島までの距離を測ってみます。
四方矩1の目盛りx，四方矩2の目盛りy，四方矩間の距離z，ただし，$x>y$としたとき，以下の図を利用して海岸から島までの距離PSの長さをx, y, zを使って求めよ。



3 みなさんは経済学にどのようなイメージを持っていますか？お金，貿易，景気などさまざまな経済分野の分析を可能にしているのが数学の力です。現代の経済学では「市場における需要と供給の関係」をもとに，市場の価格などの様子を分析する方法があります。

ある価格 p と，そのときの需要 q の関係を表す関数を需要関数といいます。また，ある一定量の需要 q を満たすためには価格 p をいくらにすればよいかという関係を表す関数を逆需要関数といいます。この関数を使って市場を分析してみましょう。

（1）あなたはカレーチェーンのオーナーで，あるショッピングセンターに新しく店をオープンさせるかを検討しています。このショッピングセンターには他にカレー店はなく，カレーの1日あたりの需要 q が $q=500-\frac{1}{2}p$ $(0\leqq p\leqq 1000)$ という価格 p の関数（需要関数）で与えられ，カレー1皿を作る費用は人件費等をすべて含めて，ちょうど400円という状況です。

① カレー店の利益を価格 p の関数 $f(p)$，および需要量 q の関数 $g(q)$ として2通りの方法でそれぞれ表しなさい。

② 利益を最大にするためにはカレー１皿をいくらで売ればよいか答えなさい。

③ １皿あたりの費用400円の他に，賃料として月々100万円支払わなければならないとするとき，利益の面から見て店をオープンすべきか答えなさい。ただし，1ヶ月は30日とし，月々20万円以上の利益があればオープンすることにします。

（2）あなたが店をオープンさせたショッピングセンターで賃料が下がったため，ライバルチェーン店が新規参入してきました。あなたの店をA，ライバル店をBとします。カレーの値段は，各店がそれぞれ決定した1日あたりの生産量（需要予想）q_1（A店），q_2（B店）に対し，逆需要関数 $T(q_1, q_2)=1000-2q_1-3q_2$ で与えられ，またカレー１皿を作る費用はA店が400円，B店が340円であるとします。このとき，相手の生産量に応じて自分の利益を最大にする生産量を考えましょう。

① 相手Bの生産量 q_2 が100の場合，あなたの店Aの利益を最大にする生産量 q_1 を求めなさい。

② あなたの店Aの利益（賃料を差し引く前の値）を q_1, q_2 の関数 $f_A(q_1, q_2)$ として求めなさい。

相手の生産量 q_2 が与えられたときに，あなたの店の利益 $f_A(q_1, q_2)$ を最大にする q_1 の値を対応させる関数を最適反応関数と呼び，$R_A(q_2)$ と表します。例えば，（2）①で求めた q_1 は $R_A(100)$ になります。

③ 両店の最適反応関数 $R_A(q_2)$，$R_B(q_1)$ を求め，$q_1=R_A(q_2)$，$q_2=R_B(q_1)$ のグラフを，q_1 を横軸，q_2 を縦軸とする平面上に図示しなさい。

④ 両店が共存するためには生産量を調整する必要があります。両店の共存にとって，もっとも理想的な生産量 q_1，q_2 の組を（2）の③の２つの関数から求めなさい。

このページに問題はありません

4 私たちがインターネットで買い物をしてクレジット決済をするとき，自分の暗証番号をクレジット会社に伝える必要があります。その際，他者にハッキングされ悪用されないように，暗証番号を暗号化して伝える必要があります。

今日，インターネットで用いられている代表的な暗号にRSA暗号があります。これは，暗号を受け取る人が，暗号を作るルールを広く公開しても簡単には解読されないという特長があります。そこには素数の性質が使われています。

（1）【表1】を用いて１から100までの素数を求め，素数を○で囲みなさい。

【表1】

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

（2）15750，2491を素因数分解しなさい。

インターネットで買い物をした富山くんは，ショップ側から次のように指示されました。
『クレジットカードの暗証番号を37乗して，その結果を2491で割って，そのときの余りの数字をメールで送ってください』

クレジットカードの4桁の暗証番号が1080のとき，富山くんがショップに送る数字を考えてみましょう。

1080^{37}を計算すると膨大な数になることが予想されます。求める数字は2491で割った余りなので，2491より小さい数になることはわかります。余りだけに着目して，効率よく計算する方法を考えましょう。

自然数mで割った余りの世界を考えます。これをmを「法」とする世界といいます。
また，整数a，bに対し，aをmで割った余りとbをmで割ったときの余りが等しいとき，
「mを法としてaとbは合同である」といい，$a \equiv b \pmod{m}$とかきます。
（例）11を７で割ると余りが４だから，$11 \equiv 4 \pmod{7}$

合同式の性質は次の通りです。
$a \equiv b \pmod{m}$ かつ $c \equiv d \pmod{m}$ （a, b, c, d は整数 m, n は自然数） のとき
$a+b \equiv c+d \pmod{m}$　　$a-b \equiv c-d \pmod{m}$
$ac \equiv bd \pmod{m}$　　$a^n \equiv b^n \pmod{m}$

合同式の性質を利用すると

$1080^2=1166400\equiv612 \pmod{2491}$

$1080^4=(1080^2)^2\equiv612^2=374544\equiv894 \pmod{2491}$

$1080^8=(1080^4)^2\equiv894^2=799236\equiv2116 \pmod{2491}$ となります。

（3）1080^{16}を2491で割ったときの余りを求めなさい。

（4）クレジットカードの暗証番号が1080のとき，富山くんがショップに送った数字を求めなさい。

ショップは富山くんが送った数字から，どのようにして暗証番号を求めたのでしょう。次の定理を利用すると，暗号化された数字を元に戻す(復号化）することができます。

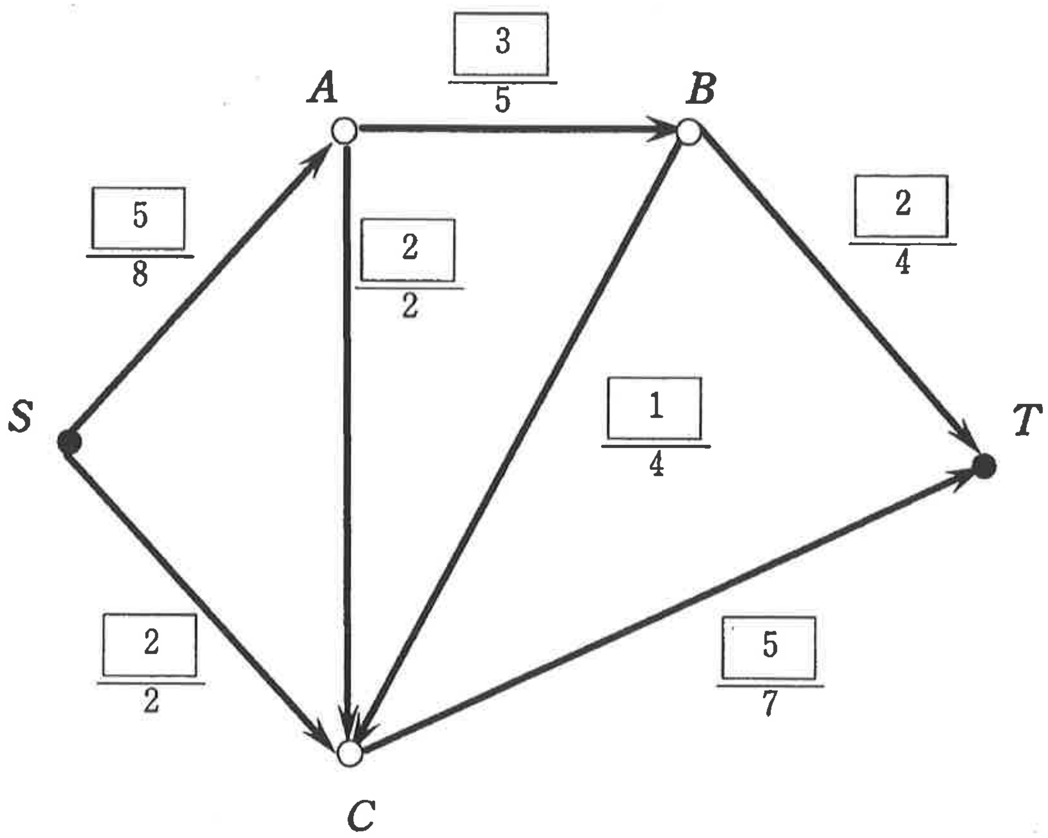
> 異なる素数P，Qに対して，N＝PQを法とする世界を考える。P－1とQ－1の最小公倍数をLとする。
> Lと互いに素な数D，Eに対して，次の式が成り立つ。
> $(X^E)^D\equiv X \pmod{N}$　（ただし，ED＝$k\times L+1$：kは整数）

このとき，NとEは公開しても大丈夫な数「公開鍵」，Dは知られてはならない数「秘密鍵」になります。ショップはこれを利用して２つの素数P, Qを選び，N＝2491とE＝37を公開し，暗証番号Xを暗号化してもらったのです。これをRSA暗号といいます。

（5）富山くんが送った数字（暗号）が266であったとき，クレジットカードの暗証番号を求めなさい。
ただし，暗証番号は2490以下の数であるとします。

5 社会では人やもの，情報がお互いに深く関連づけられています。その関係性を点や線，矢印で表すことで，全体の様子が単純化され，お互いの関係性が理解しやすくなります。ここでは宅配便を例にして，効率的なものの流れについて，点と矢印を用いて考えてみましょう。

ある宅配会社がSからTに荷物を配達するとき，様々な配達経路が考えられます。経路には「向き」と「容量」があり，たとえば$\dfrac{\boxed{}}{5}$と書いてある経路は最大5の荷物を矢印の向きに運ぶことが出来る経路で，$\boxed{}$は実際に運んだ荷物の量を表します。例えば，【図1】の経路では，SからTへ7の荷物を運んでいます。S,T以外の各点における搬入量と搬出量は等しくなっています。



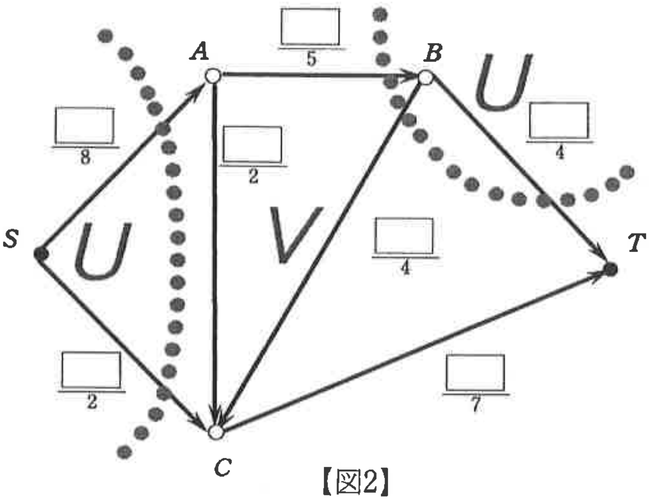
【図1】

荷物を複数に分けて，同時に複数の経路を使っても良いとして，与えられた配達経路に対して出来るだけたくさんの荷物をSからTに配達することを考えましょう。

さて，点S,Tを含めた配達経路全ての点S,T,A,B,Cを「Sが含まれている集合U」と「Tが含まれている集合V」に分けることを「カット」といいます。例えば、【図1】の配達経路で【図2】のように，$U=\{S,B\},V=\{A,C,T\}$と分けたとき，これはカットになります。このカットを$[U,V]$または$[\{S,B\},\{A,C,T\}]$と表します。

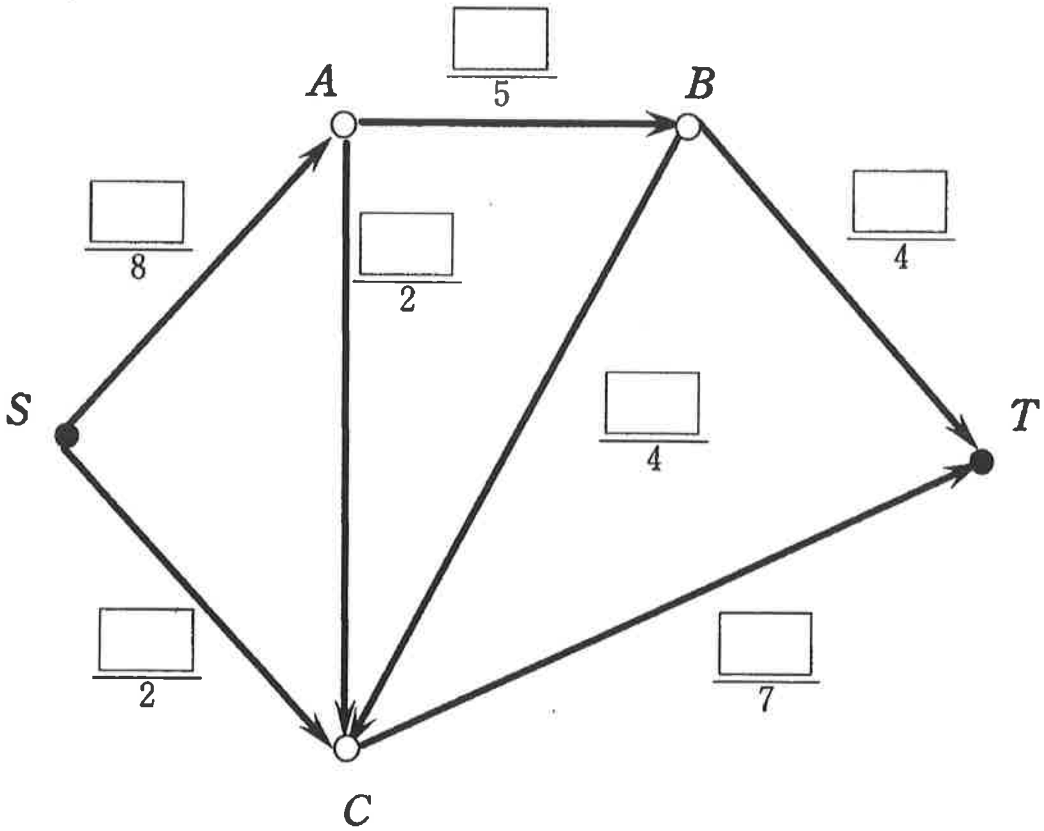
（1）【図1】でカットは何通り考えられるか。また，一般にS,Tを含めてn個の点からなる配達経路について，カットは何通り考えられるか答えなさい。

カット$[U,V]$が与えられたとき，Uの点からVの点に向かう経路の容量の総和をそのカットの容量といい，$c[U,V]$と表します。例えば，$U=\{S,B\},V=\{A,C,T\}$とするとき，【図2】から$c[U,V]=18$となります。



【図2】

（2）【図3】の配達経路において，全てのカットとその容量を求めなさい。



【図3】

配達できる最大の荷物の量を求めるときに，以下の定理を用います。

最大フロー最小カット定理 **「SからTへ運べる最大の量は，カットの容量の最小値に等しい。」**

（3）SからTへ運ぶことの出来る荷物の最大量を与えるような各経路の配達量を，解答欄の$\boxed{}$に記入しなさい。

（4）SからTへ運べる最大の量がカットの容量の最小値を超えない理由を，あなたの言葉で説明しなさい。